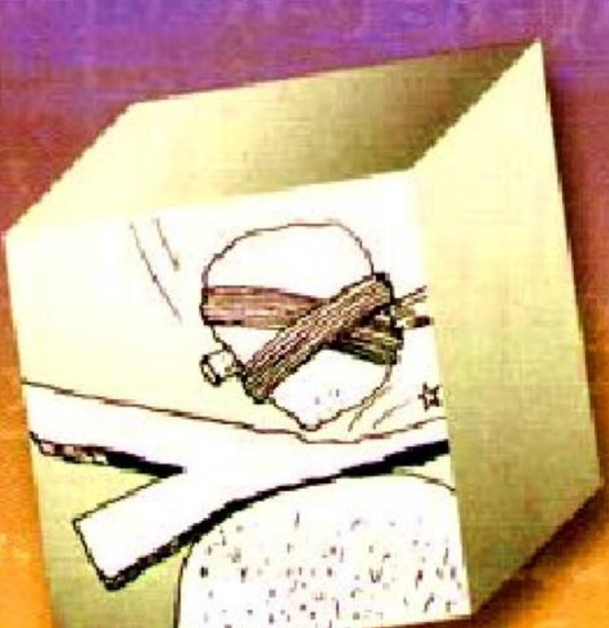
Математика · элективные курсы

А. Х. Шахмейстер

Построение графиков функций элементарными методами



Практикум
Тренинг
Контроль

А. Х. Шахмейстер

Построение графиков функций элементарными методами

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ

С.-Петербург
Москва
2011

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Редактор:
Кандидат пед. наук, доцент кафедры
математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:
Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко,
заслуженный учитель РФ Т. И. Курсиш,
заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц.

Шахмейстер А. Х.
Ш32 Построение графиков функций элементарными методами. — 3-е изд., исправленное и дополненное — СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс» : М.: Издательство МЦНМО, 2011. — 184с.: илл. — ISBN 978-5-98712-021-7, 978-5-91281-049-7, ISBN 978-5-94057-790-4

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

ISBN 978-5-94057-790-4 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-021-7 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91281-049-7 (ООО «Виктория плюс»)

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ МЕТОДАМИ

Научный редактор серии *А.В. Семенов*
Художник *Ю.Н. Куликов*
Компьютерная Верстка *С.С. Афонин*
Корректоры *Е.Г. Никитина, И.Б. Смирнов, А.Б. Смирнов*

Подписано к печати 24.04.2011 г. Формат 60x90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 11,5 печ. л. Тираж 2500 экз. Заказ № 177.

Отпечатано с диапозитивов в ГППО «Псковская областная типография».
180004, г. Псков, ул. Ротная, 34.

Посвящается памяти
Заслуженных учителей России:

Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Владимира Леонидовича Ильина

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программа элективного курса для учащихся 9-11 классов (30 уроков).

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1 – 5	**Асимптоты (стр. 5 – 15)** Практикум (И.Ф.П.Г.) (1, 2, 4, 6, 7, 9).
6 – 10	**Наклонная асимптота (стр. 42 – 44)** Тренировочная работа (1, 2, 4, 6, 7, 10, 12)
11 – 17	**Графики сложных функций (стр. 40, 58, 62 – 74)** Тренировочная работа (11, 13, 14, 15). Проверочные задания (27, 29).
18 – 25	**Проверочные задания (стр. 71 – 129)** Проверочные задания (1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 18, 21, 25, 28, 30).
26 – 30	**Зачетные карточки (стр. 130 – 183)** Карточка 1 (2, 3). Карточка 2 (1, 2). Карточка 3 (1, 3). Карточка 4 (2, 3). Карточка 5 (1, 2, 3). Карточка 7 (2, 3). Карточка 8 (1, 3). Карточка 9 (2). Карточка 10 (2, 3).

Программа подготовлена, составлена и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1 Асимптоты

Вводные замечания

Пусть x стремится к бесконечности.
$x = 1, 2, 3, \ldots, 10^{100}, \ldots \quad x \to +\infty$,
тогда дробь $\frac{1}{x}$ стремится к нулю:
$\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{10^{100}}; \ldots \quad \frac{1}{x} \to 0.$
Итак, если $(x \to +\infty)$, то $\left(\frac{1}{x} \to 0\right)$.
Очевидно, что

$$\text{если } x \to +\infty, \text{ то дробь } \frac{1}{x-10} \to 0;$$

$$\text{если } x \to +\infty, \text{ то дробь } \frac{1}{x^2-10^{10}} \to 0 \text{ и т.д.}$$

Интересно, а что будет, если дробь имеет вид $\frac{x+2}{x^2+2}$?
Так как степень числителя меньше степени знаменателя,
$(x \to +\infty) \Rightarrow \left(\frac{x+2}{x^2+2} \to 0\right)$.

Обобщая, можно сделать вывод,

что любая дробь вида $\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}$

при $x \to +\infty$ стремится к нулю, если $m < n$.

Пример. Если $x \to \infty$, то $\frac{2x^5-3x^2+1}{7x^6+5x^4-x^2+19} \to 0$.
Покажем это.

Представим дробь

$$\frac{2x^5-3x^2+1}{7x^6+5x^4-x^2+19}=\frac{x^6\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^6}\right)}{x^6\left(7+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{19}{x^6}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^6}}{7+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{19}{x^6}}\to\frac{0-0+0}{7+0-0+0},\text{ если } x\to\infty$$

так как при $x\to\infty$ $\frac{1}{x}\to 0$, $\frac{1}{x^2}\to 0$, $\frac{1}{x^4}\to 0$, $\frac{1}{x^6}\to 0$,

тогда и вся дробь стремится 0.

Рассмотрим вновь дробь $\frac{1}{x}$.

Если x стремится к нулю, т. е. $x=1; 0{,}1; 0{,}01; \ldots ; 10^{-n}; \ldots$,

то $\frac{1}{x}=1; 10; 100; \ldots ; 10^n$, $\frac{1}{x}\to+\infty$.

Итак, если $(x\to 0)\Rightarrow\left(\frac{1}{x}\to+\infty\right)$,

причем важно, что **слева,** т. е. $-1; -10^{-1}; \ldots ; (-10^{-n})$.

Из $(x\to 0-0)\Rightarrow\left(\frac{1}{x}\to-\infty\right)$;

из $(x\to 0+0)\Rightarrow\left(\frac{1}{x}\to+\infty\right)$, где

$x\to \underline{0-0}$ **— обозначение стремления к нулю <u>слева</u>,**
$x\to \underline{0+0}$ **— обозначение стремления к нулю <u>справа</u>.**

Аналогично для дроби $\frac{1}{x-2}$.

Из $(x\to 2+0)\Rightarrow\left(\frac{1}{x-2}\to+\infty\right)$;

из $(x\to 2-0)\Rightarrow\left(\frac{1}{x-2}\to-\infty\right)$.

Сложнее, если дробь $\frac{1}{x^2-2x-3}$, тогда вначале выясним интервалы знакопостоянства дроби, т. е. где она положительна, а где отрицательна.

Значит, $$(x \to 3+0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2-2x-3} \to +\infty\right);$$
$$(x \to 3-0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2-2x-3} \to -\infty\right);$$
$$(x \to -1+0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2-2x-3} \to -\infty\right);$$
$$(x \to -1-0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2-2x-3} \to +\infty\right).$$

Примечание. Необходимо отметить, что x принимает не только рациональные, но и любые вещественные значения. В данном случае не имеет значения, принимает ли x только натуральные, целые, рациональные или вещественные значения. Разумеется, с позиции строгой научной теории необходимо было бы дать четкие определения предела функции в точке и предела функции на бесконечности. Но это была бы другая книга. Здесь же опора идет на интуитивное представление.

Далее на протяжении всей книги будем обозначать:
$D(y)$ — область определения функции y,
$E(y)$ — область (множество) значений функции y.

Вертикальная асимптота

Определение: **прямая вида $x = a$ называется вертикальной асимптотой для $y = f(x)$, если из $(x \to a \pm 0) \Rightarrow (f(x) \to \pm\infty)$.**

1. Пусть $y = \frac{2}{x-3}$.

Тогда прямая $x = 3$ есть вертикальная асимптота (обозначается пунктирной прямой), так как

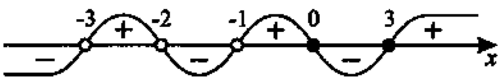
при $(x \to 3 \pm 0) \;\Rightarrow\; (y \to \pm\infty)$.

2. Пусть $y = \frac{x^2-3x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Здесь уже три вертикальных асимптоты,

так как $(x+1)(x+2)(x+3) = 0$ при $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Выясним интервалы знакопостоянства y.



Итак, $(x \to -1 + 0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -1 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2 + 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2 - 0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -3 + 0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -3 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

3. Пусть $y = \frac{x-2}{(x^2-4)x}$.

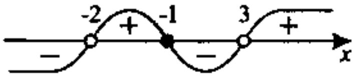
Здесь необходимо вначале упростить вид функции, т.е. сократить на $(x-2)$, не забыв, что в новом виде $y = f(x)$; $x = 2 \notin D(f)$, т.е. $x = 2$ не есть вертикальная асимптота, хотя ясно, что наличие вертикальной асимптоты связано с равенством знаменателя нулю.

Далее отметим, что $x = -2$; $x = 0$ есть вертикальные асимптоты. Читатель может самостоятельно проверить это по определению асимптоты.

4. Пусть $y = \frac{x^2-2x-3}{(x^2-6x+9)(x+2)}$. Разложив на множители и сократив, имеем $y = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)^2(x+2)}$.

$y = \frac{x+1}{(x-3)(x+2)}$, но здесь $x = 3$ — вертикальная асимптота, так как и после сокращения на $(x-3)$ в знаменателе находится $x-3$.

Выясним интервалы знакопостоянства



Тогда $(x \to 3+0) \quad \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 3-0) \quad \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

т.е. прямые $x = 3$; $x = -2$ являются вертикальными асимптотами.

5. Пусть $y = \frac{x^2+3x}{x-1}$.

$D(y)$: $x \neq 1$. Очевидно, что вертикальные асимптоты связаны с $D(y)$, т.е. с условием равенства знаменателя нулю.

Итак, $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Убедимся в этом, ведь степень числителя выше степени знаменателя.

Действительно, при $x \to 1$ знаменатель стремится к нулю, а числитель — к числу 4, но при делении числа 4 на число, очень близкое к нулю, получаем число, модуль которого очень большой (бесконечность).

Так как $y = \frac{x(x+3)}{x-1}$, то распределение знаков функции будет

Итак, $(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$,
$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$,

т.е. $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Горизонтальная асимптота

Определение: прямая вида $y = b$ называется горизонтальной асимптотой, если при $(x \to \pm\infty) \Rightarrow (f(x) \to b)$.

1. $y = \frac{1}{x-2}$.

   $(x \to \infty) \Rightarrow (\frac{1}{x-2} \to 0)$, т. е. $y = 0$ есть горизонтальная асимптота (обозначается пунктирной прямой).

2. $y = \frac{2}{x+3} + 4$.

   Из $(x \to \infty) \Rightarrow (\frac{2}{x+3} \to 0)$,

   т. е. из $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 4)$.

   Итак, $y = 4$ — горизонтальная асимптота (обозначается пунктирной прямой).

3. $y = \frac{3-x}{x+1}$. Выделяем целую часть

   $\frac{3-x}{x+1} = \frac{-x-1+4}{x+1} = -1 + \frac{4}{x+1}$

   $\frac{3-x}{x+1} = -1 + \frac{4}{x+1}$;
   $$\begin{array}{r|l} -x+3 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-x-1} & -1 \\ 4 & \end{array}$$

   Итак, из $(x \to \infty) \Rightarrow \left(\frac{4}{x+1} \to 0\right) \Rightarrow (y \to -1)$.

   $y = -1$ является горизонтальной асимптотой.

4. $y = \frac{x+2}{x^2+2}$.

   При $(x \to \infty) \Rightarrow (\frac{x+2}{x^2+2} \to 0)$. Так как степень числителя равна 1, а степень знаменателя равна 2, т. е. степень числителя меньше степени знаменателя, то $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

5. $y = \frac{x^2-3x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. Аналогично: степень числителя 2, а степень знаменателя 3, значит, $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.

6. $y = \frac{x^2-x-2}{2x^2+3x+2}$. Здесь степень числителя равна степени знаменателя, что же делать?

Вынесем x^2 и в числителе, и в знаменателе:
$\dfrac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\dfrac{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}$.

Так как из $(x\to\infty)\Rightarrow\left(\frac{1}{x}\to 0\right)$

и из $(x\to\infty)\Rightarrow\left(\dfrac{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\to\dfrac{1-0-2\cdot 0}{2+3\cdot 0+2\cdot 0}=\dfrac{1}{2}\right)$,

то из $(x\to\infty)\Rightarrow\left(y\to\frac{1}{2}\right)$, т.е. равно отношению коэффициентов при высших степенях числителя и знаменателя.

7. $y=\dfrac{3x^2+2x}{x^2+4}$;
$\dfrac{x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}=\dfrac{3+\frac{2}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}$.

Итак, $(x\to\infty)\Rightarrow(y\to 3)$,

так как $(x\to\infty)\Rightarrow\left(\frac{1}{x}\to 0\right)$

и $(x\to\infty)\Rightarrow\left(\frac{1}{x^2}\to 0\right)$,

то из $(x\to\infty)\Rightarrow\left(\dfrac{3x^2+2x}{x^2+4}\to\dfrac{3+0}{1+0}=3\right)$.

Выводы

I. Если степени числителя и знаменателя дробно-рациональной функции $f(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$ совпадают $(n=m)$, то горизонтальной асимптотой является прямая $y=\dfrac{a_0}{b_0}$ (то есть y равно отношению коэффициентов при высших степенях числителя и знаменателя).

II. Если степень числителя меньше степени знаменателя $(n<m)$, то горизонтальной асимптотой является ось абсцисс $y=0$.

Области существования графика на координатной плоскости

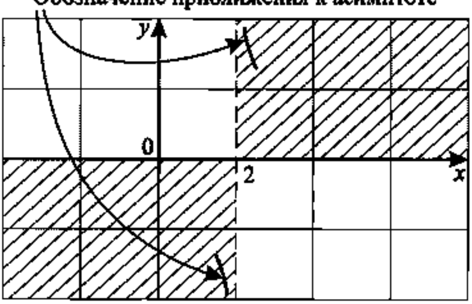
Определение: **графиком функции называется множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют функциональному равенству: $\Gamma_y = \{(x;y) | y = f(x)\}$.**

1. $y = \frac{1}{x-2}$. $D(y)$: $x \neq 2$.

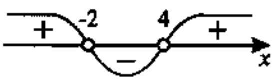
$y > 0$ при $x > 2$, $(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$y < 0$ при $x < 2$, $(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$,'

то $x = 2$ — вертикальная асимптота (рисуется пунктирной прямой). Область существования $y = f(x)$ заштрихована.

Обозначение приближения к асимптоте



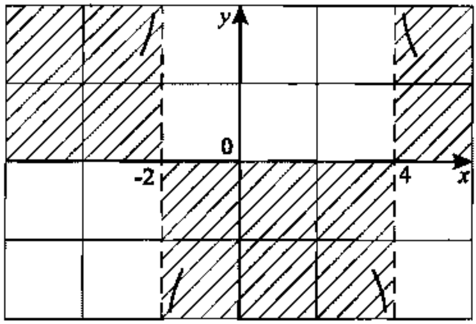
2. $y = \frac{3}{x^2-2x-8}$. $D(y)$: $x \neq -2$; $x \neq 4$.

Так как 

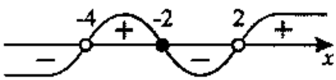
$y > 0$ при $x > 4$ и $x < -2$;
$y < 0$ при $-2 < x < 4$;

$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 4-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 4+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;

$x = 4$; $x = -2$ — вертикальные асимптоты.



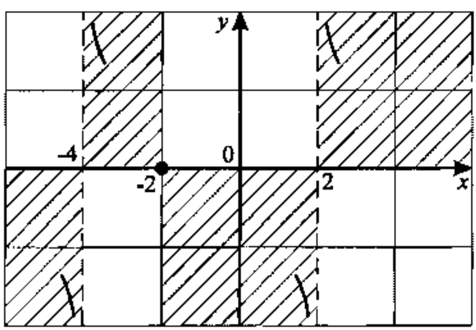
3. $y = \frac{x+2}{x^2+2x-8}$. $D(y)$: $x \neq -4$; $x \neq 2$.



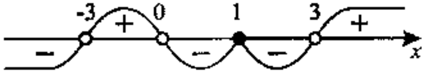
$(x \to -4-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;.
$(x \to -4+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$.

Здесь корень $x = -2$ рисуется сплошной линией,

$x = -4$; $x = 2$ — вертикальные асимптоты.



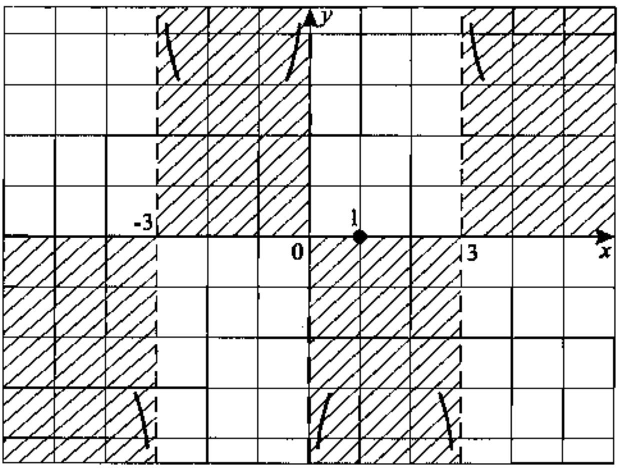
4. $y = \frac{(x-1)^2}{x(x^2-9)}$. $D(y)$: $x \neq -3$; $x \neq 0$; $x \neq 3$.



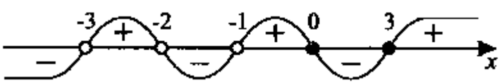
$$
\begin{aligned}
(x \to -3-0) &\Rightarrow (y \to -\infty);\\
(x \to -3+0) &\Rightarrow (y \to +\infty);\\
(x \to 0-0) &\Rightarrow (y \to +\infty);\\
(x \to 0+0) &\Rightarrow (y \to -\infty);\\
(x \to 3-0) &\Rightarrow (y \to -\infty);\\
(x \to 3+0) &\Rightarrow (y \to +\infty);
\end{aligned}
$$

$x = 1$ — корень (нуль) функции;

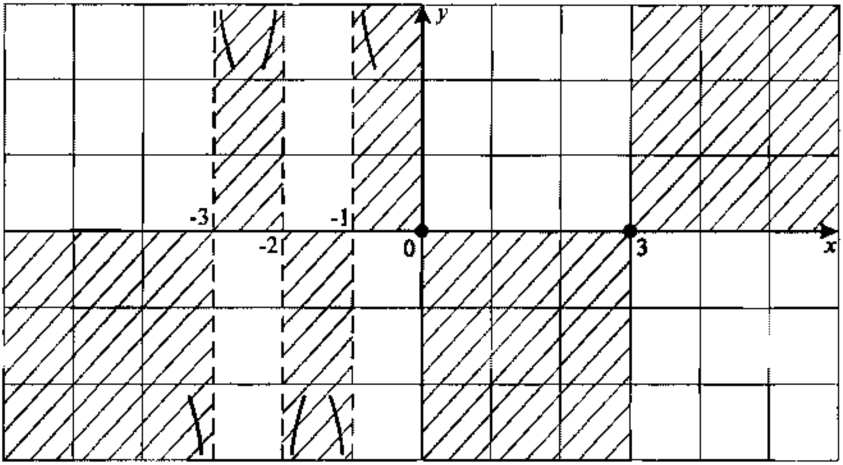
$x = 0$; $x = 3$; $x = -3$ — вертикальные асимптоты.



5. $y = \frac{x^2-3x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. $D(y)$: $x \neq -3$; $x \neq -2$; $x \neq -1$.



$$
\begin{aligned}
(x \to -3-0) &\Rightarrow (y \to -\infty);\\
(x \to -3+0) &\Rightarrow (y \to +\infty);\\
(x \to -2-0) &\Rightarrow (y \to +\infty);\\
(x \to -2+0) &\Rightarrow (y \to -\infty);\\
(x \to -1-0) &\Rightarrow (y \to -\infty);\\
(x \to -1+0) &\Rightarrow (y \to +\infty).
\end{aligned}
$$



В данном пункте очень важно понимать, что мы здесь имеем дело с бесконечными областями в виде прямых углов или прямоугольников, задаваемых двумя переменными x и y в виде неравенств.

Скажем, в примере 2 самая левая область задается неравенствами $\begin{cases} x < -2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$, средняя область — $\begin{cases} -2 < x < 4 \\ y < 0 \end{cases}$ и так далее.

Вопрос: для чего выделять эти области?

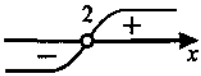
Ответ: только в этих областях присутствует графический эскиз функции.

Примечание Вполне может быть, что какие-то асимптоты графика функции совпадают с осями координат. В этом случае, по умолчанию, на сплошные линии осей накладываются пунктиры, обозначающие асимптоты.

Практикум. Исследование функций и построение графиков (И.Ф.П.Г.)

1. $y = \frac{1}{x-2}$.

$D(y)$: $x \neq 2$.



$x = 2$ — вертикальная асимптота,

так как из $(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to \infty)$;

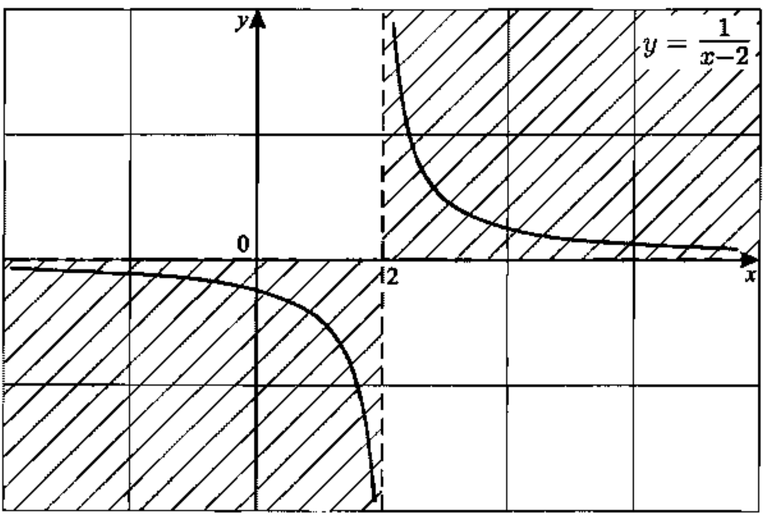
из $(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

Области существования эскиза графика:

$y > 0$; $x > 2$; $y < 0$; $x < 2$.

$y = 0$ — горизонтальная асимптота,

так как $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.

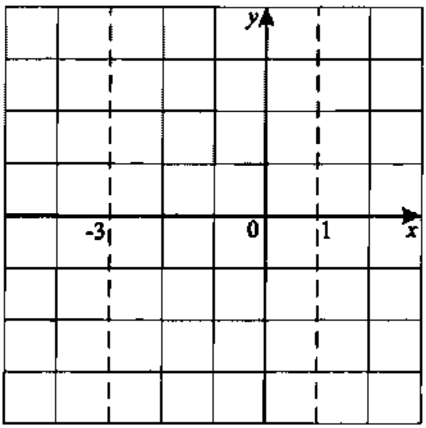


Эскиз графика $y = f(x)$. Узнаем гиперболу, сдвинутую вправо на 2.

2. $y = \frac{1}{x^2+2x-3}$.

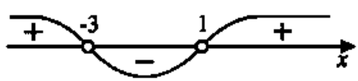
1) $D(y)$: $x \neq -3$; $x \neq 1$.

Похоже, $x = -3$, $x = 1$ — вертикальные асимптоты.

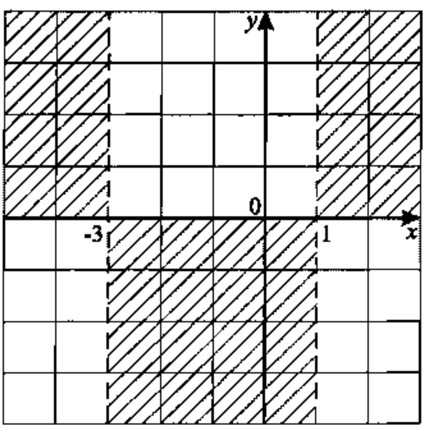


2) **Выясним интервалы знакопостоянства.**

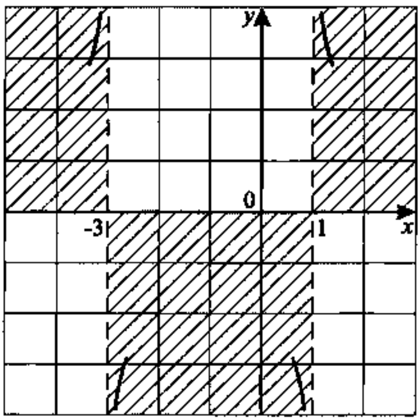
$y = \frac{1}{(x+3)(x-1)}$.



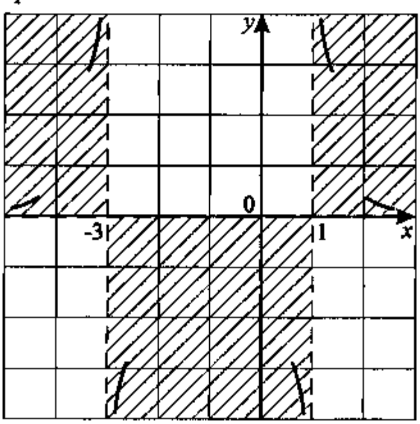
Теперь, учитывая интервалы знакопостоянства, заштриховываем легкими штрихами области возможного существования графика функции.



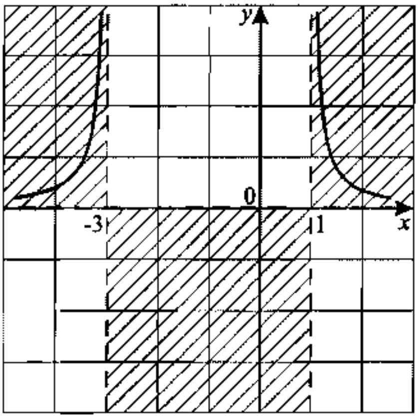
3) $(x \to 1+0) \quad \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 1-0) \quad \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$.
Зная, что $x = -3$ и $x = 1$ — вертикальные асимптоты, изобразим приближения к ним графика.



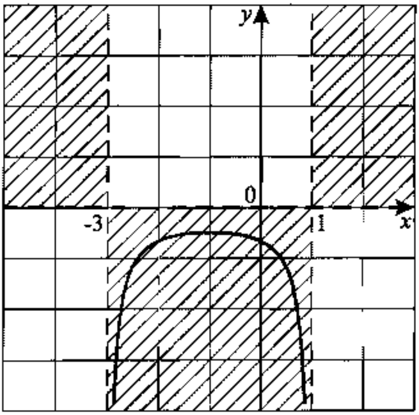
4) Так как $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$, то $y = 0$ — горизонтальная асимптота, которая обозначается на графике.



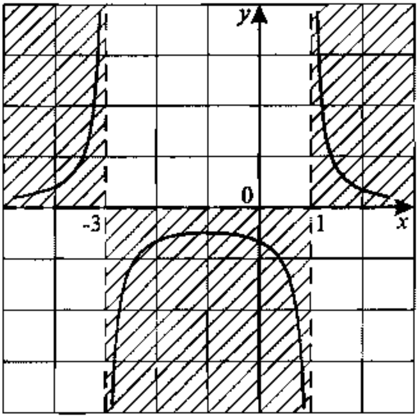
5) Плавной кривой соединим асимптотические приближения на интервале $x > 1$ и $x < -3$.



6) На интервале $-3 < x < 1$ сложнее, так как надо от асимптотического приближения к $(-\infty)$ вблизи $x = -3$ перейти к $(-\infty)$ вблизи $x = 1$, но это возможно сделать только в виде плавной горки.



Итак, $y = \frac{1}{x^2+2x-3}$. Эскиз готов.



7) Контрольные точки. Они необходимы, чтобы более точно построить эскиз графика $y = f(x)$.

   а) Пусть $x = 2$. $y(2) = \frac{1}{2^2+2\cdot 2-3} = \frac{1}{5}$, т. е. $A\left(2; \frac{1}{5}\right)$ принадлежит графику Зафиксировали кривую на $x > 1$, т. е. на $(1; +\infty)$.

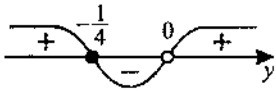
   б) $x = 0$. $y(0) = -\frac{1}{3}$; $B\left(0; -\frac{1}{3}\right)$ — точка пересечения графика с осью ординат. Тем самым зафиксировали кривую на $(-3; 1)$. Достижение кривой наибольших значений на $(-3; 1)$ — тема отдельного исследования.

   в) $x = -4$. $y(-4) = \frac{1}{16-8-3} = \frac{1}{5}$. $C\left(-4; \frac{1}{5}\right)$ принадлежит графику, т. е. зафиксировали кривую на $(-\infty; -3)$. Получаем более точный эскиз графика.

8) В данном случае можно элементарными методами выяснить множество всех значений функции, т. е. $E(y)$, где $y = \frac{1}{x^2+2x-3}$.

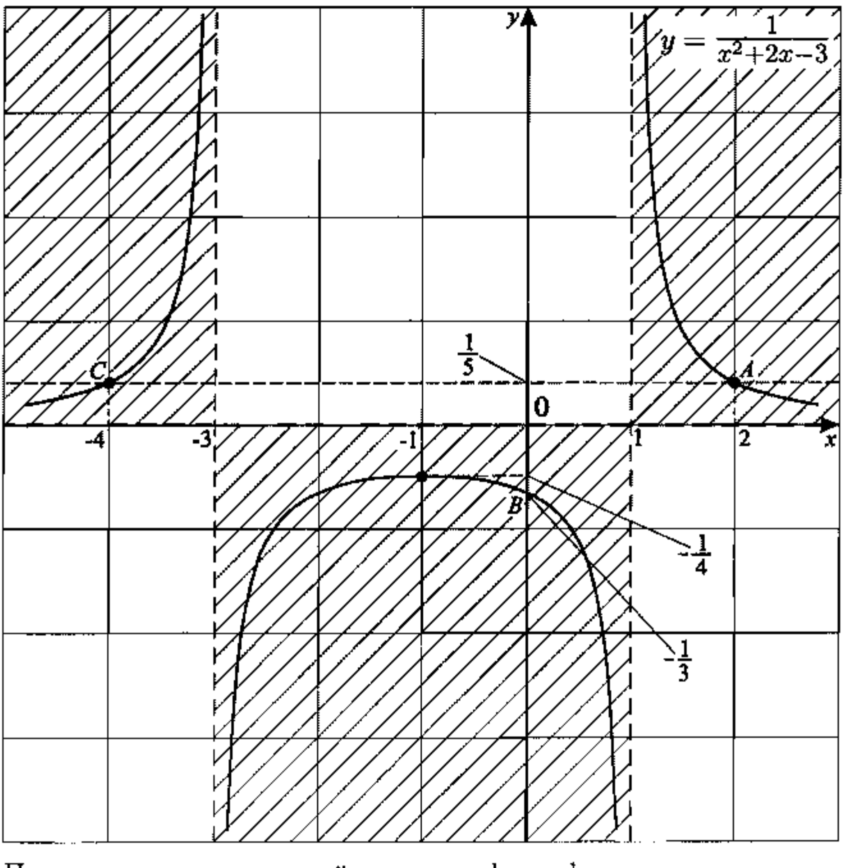
   Полагая y как параметр, решим вопрос исследованием возможности существования корней у параметрического уравнения $yx^2 + 2xy - 3y = 1$.

   Таким образом, $yx^2 + 2xy - 3y - 1 = 0$; $y \neq 0$, тогда $D = y^2 + 3y^2 + y = 4y^2 + y = y(4y + 1) \geqslant 0$.



Итак, $E(y) = \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup (0; +\infty)$, т.е. на $(-3; 1)$ наибольшее значчние функции равно $-\frac{1}{4}$. Так как при $y = -\frac{1}{4}$ $D = 0$, то $x = -1$.

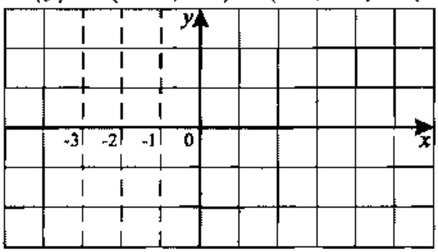
Итак, при $x = -1$ $y_{\text{наиб}} = -\frac{1}{4}$.



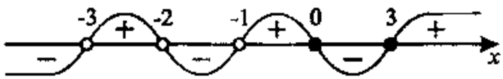
Получили окончательный эскиз графика функции $y = \frac{1}{x^2+2x-3}$.

3. $y = \frac{x^2-3x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

1) $D(y) = (-\infty;-3) \cup (-3;-2) \cup (-2;-1) \cup (-1;+\infty)$.

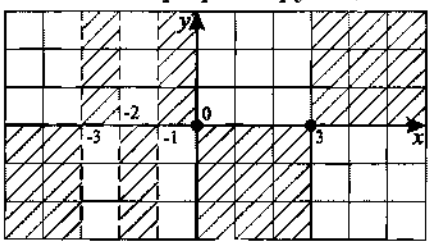


2) Интервалы знакопостоянства



,

что дает возможность заштриховать области существования графика функции.

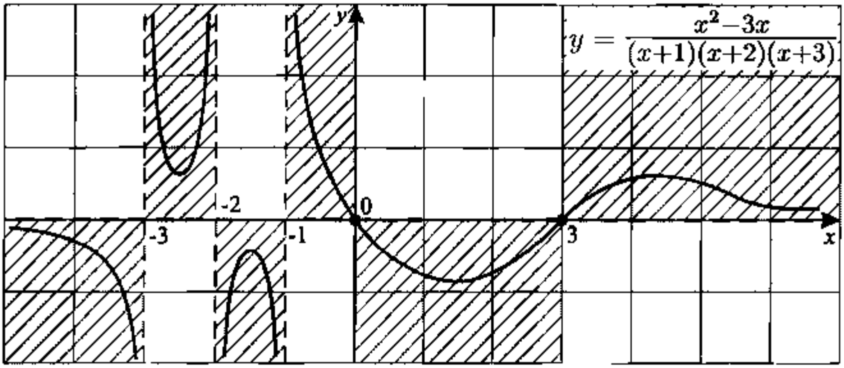


3) Асимптоты

$(x \to -1+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -1-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.

4) Плавно соединим асимптотические приближения.
На $(-\infty;-3)$ — аналог гиперболы;
на $(-3;-2)$ — кривая в виде ямки;
на $(-2;-1)$ — кривая в виде горки;
на $(-1;0)$ соединим плавно $(0;0)$ с асимптотическим приближением к $x=-1$;

на $[0;3]$ плавно соединяя $(0;0)$ и $(3;0)$, имеем ямку; на $[3;+\infty)$ плавно соединяя $(3;0)$ с асимптотическим приближением к $y=0$, имеем вид горки.



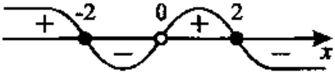
Итак, приближенный вид графика есть. Рассматривая контрольные точки на каждом интервале, можно уточнить эскиз. Можно более точно установить минимальные и максимальные значения, используя мощный аппарат дифференциального исчисления, но это тема отдельного исследования.

Целью же данной книги является развитие графического мышления и интуиции, когда, только взглянув на вид функции, мы уже можем в первые пять секунд представить приблизительный эскиз графика и характер поведения на том или ином интервале с определенной степенью точности.

Примечание. Весьма полезно строить графики рассматриваемых функций на миллиметровке. Так как, зачастую в книге рассматривается, из-за технических трудностей и из-за ограниченности графического поля только приблизительный эскиз графика. Для большей доступности и наглядности иногда нарушается масштабность.

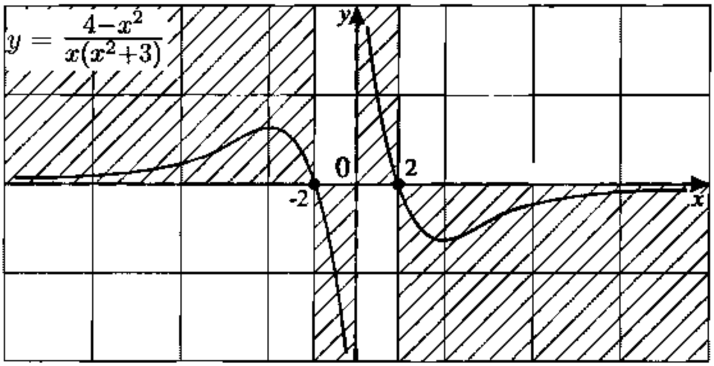
4. $y = \frac{4-x^2}{x(x^2+3)}$.

1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. $x = 0$ — вертикальная асимптота ($x^2 + 3 \neq 0$ для любого x).

2) 

3) $(x \to 0 + 0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 0 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

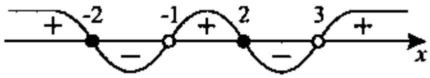
4) $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.



5) Важно обратить внимание на тот факт, что так как функция нечетная (т. е. область определения ее — симметричное относительно нуля множество и для всех $x \in D(y)$ $y(-x) = -y(x)$), то график центрально симметричен относительно начала координат — точки $(0; 0)$.

5. $y = \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3}$. $\frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+1)}$.

1) $D(y)=(-\infty;-1) \cup (-1;3) \cup (3;+\infty)$.

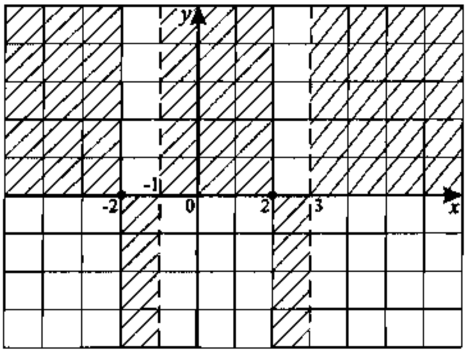
2) 

3) $(x \to 3+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$
$(x \to 3-0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to -1+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$
$(x \to -1-0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 2).$

Выясним, когда график пересекает горизонтальную асимптоту:

$\frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = 2;$ $2x^2 - 8 = 2x^2 - 4x - 6;$

$4x = 2;$ $x = \frac{1}{2};$ $y = 2.$



4) Выясним область изменения функции $E(y)$.

$\frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = y;$ $yx^2 - 2xy - 3y = 2x^2 - 8;$

$(y-2)x^2 - 2xy - 3y + 8 = 0;$ $y \neq 2;$

$D = y^2 + (3y-8)(y-2) = 4y^2 - 14y + 16 \geqslant 0.$

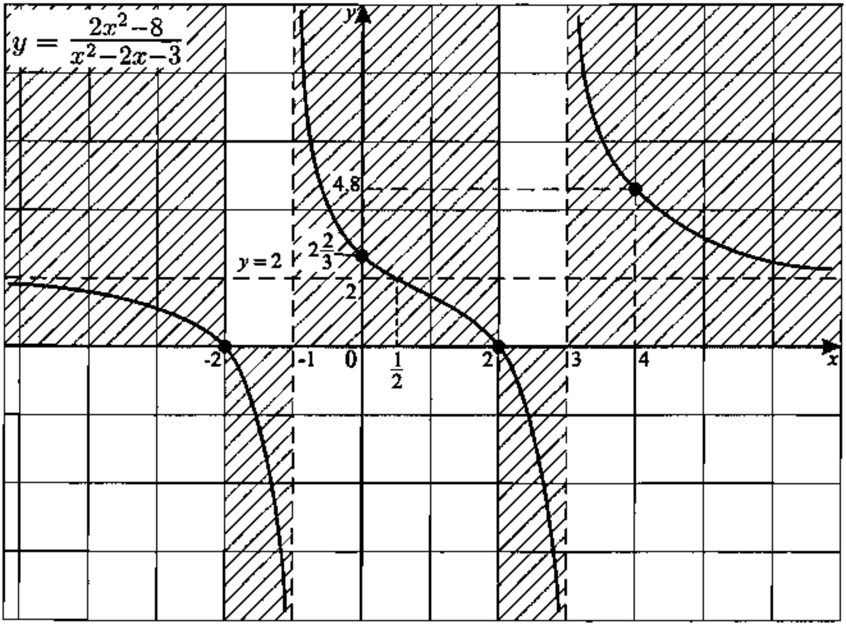
$D = 7^2 - 4 \cdot 16 < 0,$ так как $\begin{cases} a > 0, \\ D < 0, \end{cases}$

то $4y^2 - 14y + 16 > 0$ при всех y.

Значит $E(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, но так как при $x = \frac{1}{2}$ $y = 2$, то окончательно имеем
$E(y) = (-\infty; +\infty)$.

5) Контрольные точки:
$x = 0;\ y = 2\frac{2}{3};$
$x = -1{,}5;\ y = -1\frac{5}{9};$
$x = 4;\ y = 4{,}8;$
$x = -3;\ y = \frac{5}{6}$.

Эскиз графика:



Здесь интересно отметить, что на каждом из интервалов непрерывности, т. е. на $(-\infty; -1)$, $(-1; 3)$ и $(3; \infty)$, функция $y = \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3}$ убывает, но убывающей не является.

6. $y = \frac{2x^2+3}{x^2+2x-8}$. $\frac{2x^2+3}{x^2+2x-8} = \frac{2x^2+3}{(x+4)(x-2)}$.

1) $D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; 2) \cup (2; +\infty)$.

2) 

3) $(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to -4+0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to -4-0) \Rightarrow (y \to +\infty);$
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 2),$

так как $\frac{2x^2+3}{x^2+2x-8} = \frac{2+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}$,

и из $(x \to \infty) \Rightarrow \left(\frac{2+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}} \to \frac{2+0}{1+0-0} = 2\right)$.

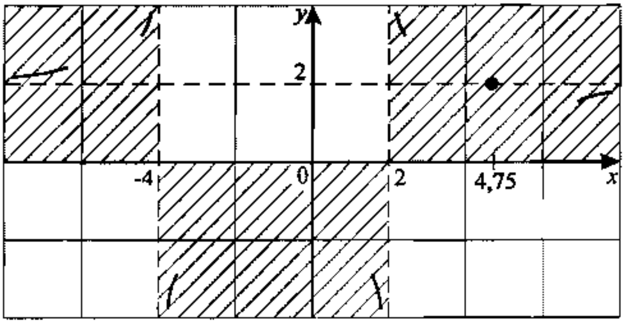
Выясним, пересекает ли график функции горизонтальную асимптоту.

$\frac{2x^2+3}{x^2+2x-8} = 2$; $2x^2+3 = 2x^2+4x-16$; $4x = 19$; $x = 4{,}75$, а это значит, что $(x \to +\infty) \Rightarrow (y \to 2-0)$; $(x \to -\infty) \Rightarrow (y \to 2+0)$,

так как при $x > 2$ график пересекает горизонтальную асимптоту в точке $A(4{,}75; 2)$,

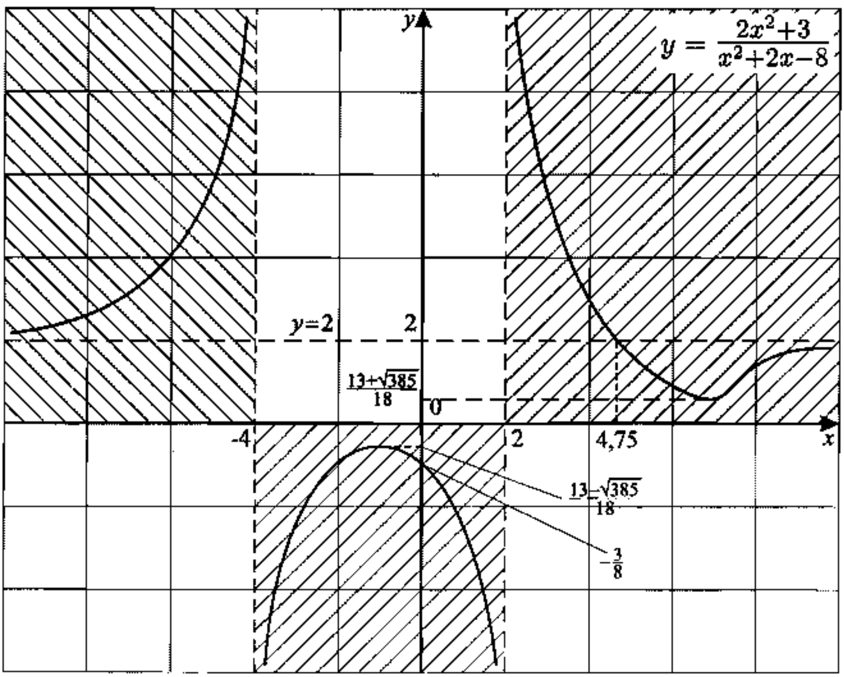
и $(x \to +\infty) \Rightarrow (y \to 2-0)$ как бы снизу.

Так как нет пересечения с $y = 2$, при $x < -4$ кривая выше $y = 2$.



4) Попытаемся найти наибольшее и наименьшее значения, т. е. $E(y)$ для $y = \frac{2x^2+3}{x^2+2x-8}$.
$yx^2 + 2xy - 8y = 2x^2 + 3;$
$(y-2)x^2 + 2xy - 8y - 3 = 0;\ \ y \neq 2;$
$D = y^2 + (8y+3)(y-2) = 9y^2 - 13y - 6 \geqslant 0;$
$y_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169+216}}{18} = \frac{13 \pm \sqrt{385}}{18}$
$\left(\frac{13-\sqrt{385}}{18} \approx \frac{7}{18};\ \frac{13+\sqrt{385}}{18} \approx \frac{5}{6}\right)$
Итак, $D(y) = \left(-\infty; \frac{13-\sqrt{385}}{18}\right] \cup \left[\frac{13+\sqrt{385}}{18}; +\infty\right)$.
Выявление, при каких x достигается $y_{\text{наиб}}$; $y_{\text{наим}}$ возможно, но технически достаточно сложно.

Итак, приблизительный эскиз графика построен.

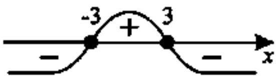


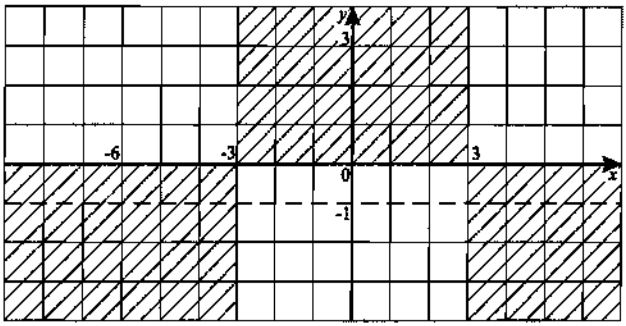
7. $y = \frac{9-x^2}{x^2+2x+3}$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Для $x^2 + 2x + 3 > 0$ при всех x,

так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -2 < 0. \end{cases}$

2) 



3) $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to -1)$.

Выясним, пересекает ли график функции горизонтальную асимптоту.

$\frac{9-x^2}{x^2+2x+3} = -1$; $9 - x^2 = -x^2 - 2x - 3$; $x = -6$.

4) Найдем $E(y)$.

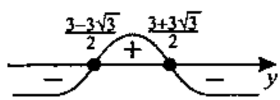
$y = \frac{9-x^2}{x^2+2x+3}$;

$yx^2 + 2xy + 3y = 9 - x^2$;

$(y+1)x^2 + 2xy + 3y - 9 = 0$; $y \neq -1$;

$D = y^2 - (3y-9)(y+1) = -2y^2 + 6y + 9 =$
$= -2(y^2 - 3y - 4{,}5) \geqslant 0$;

$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+18}}{2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}}{2}$.



$D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = \left[\frac{3-3\sqrt{3}}{2}; \frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

5) Контрольные точки: $x = 0$; $y = 3$.

6) При желании мы можем установить, при каких значениях x функция достигает наибольшее или наименьшее значения.

Действительно, для $(y+1)x^2 + 2xy + 3y - 9 = 0$;

$y \neq -1$, $x_{1,2} = \frac{-y \pm \sqrt{D}}{y+1}$.

Пусть $y_1 = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$, тогда $D = 0$, и $x_1 = \frac{-y}{y+1}$.

Подставляя y_1, получаем

$$x_1 = \frac{-\frac{3+3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3+3\sqrt{3}}{2} + 1} = -\frac{3+3\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}.$$

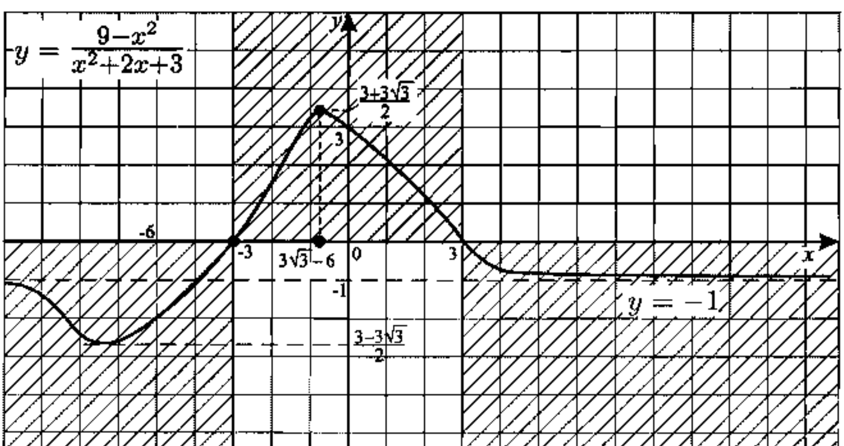
Домножая на сопряженное,

$$x_1 = -\frac{(3+2\sqrt{3})(5-3\sqrt{3})}{25-(3\sqrt{3})^2} = -\frac{15+15\sqrt{3}-9\sqrt{3}-27}{25-27} =$$
$$= -\frac{-12+6\sqrt{3}}{-2} = -6+3\sqrt{3}.$$

Итак, при $x_1 = -6+3\sqrt{3}$ $y_{\text{наиб}} = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$.

Аналогично для x_2.

Эскиз графика:



8. $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) $y > 0$ для всех x,
так как $x^2 + x + 1 > 0$, $x^2 - x + 1 > 0$.

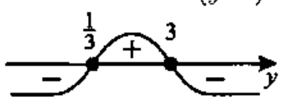
3) $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$.

4) $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 1$;
$x^2 + x + 1 = x^2 - x + 1$; $x = 0$.

5) Найдем $E(y)$.
$yx^2 - yx + y = x^2 + x + 1$;
$(y-1)x^2 - (y+1)x + y - 1 = 0$; $y \neq 1$;

$$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 = \\ = (y + 1 + 2y - 2)(y + 1 - 2y + 2) = \\ = (3y-1)(3-y) \geqslant 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{y+1 \pm \sqrt{(3y-1)(3-y)}}{2(y-1)}.$$



Но при $y = 1$ $x = 0$.
Итак, $E(y) = \left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

При $y = 3$ $x = 1$, так как $D = 0$,
при $y = \frac{1}{3}$ $x = -1$, так как $D = 0$.

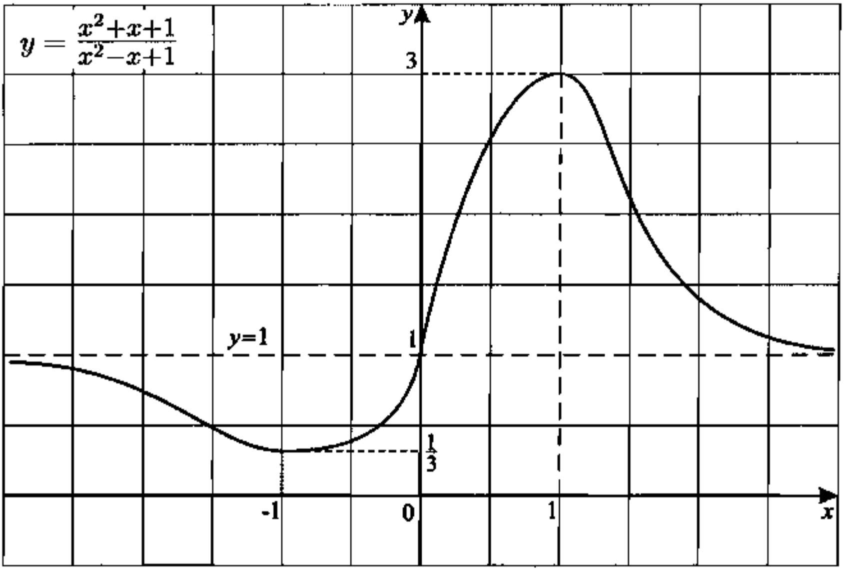
Но можно иначе. Для $ax^2 + bx + c = 0$ абсцисса вершины параболы

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}},$$

т. е. для $(y-1)x^2 - (y+1)x + (y-1) = 0$ $x_0 = \frac{y+1}{2(y-1)}$.

$x_1 = \frac{3+1}{2(3-1)} = 1$, где $y_1 = 3$;

$x_2 = \frac{\frac{1}{3}+1}{2\left(\frac{1}{3}-1\right)} = -1$, где $y_2 = \frac{1}{3}$.



Примечание. Если и в числителе, и в знаменателе есть функции не выше квадратичной, то можно вычислить не только $E(y)$, но и при каких x достигаются точные границы на $E(y)$ (если они есть) элементарными методами.

Теперь можно точно установить интервалы монотонности:

а) функция возрастает на $[-1; 1]$;

б) функция убывает на $(-\infty; -1]$;

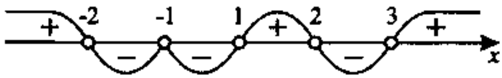
в) функция убывает на $[1; \infty)$.

9. $y = \frac{x^2-2x-3}{x^4-5x^2+4}$.

$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{x-3}{(x-2)(x+2)(x-1)}$

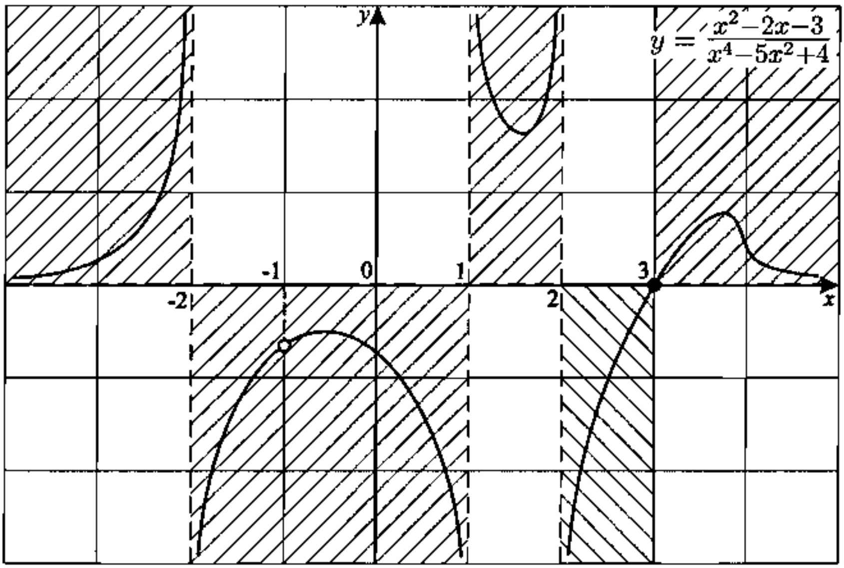
при $x \neq -1$.

1) $D(y)$: $x \neq \pm 2$; $x \neq \pm 1$.

2) 

3) $x = 2$; $x = 1$; $x = -2$ — вертикальные асимптоты,

$y = 0$ — горизонтальная асимптота.

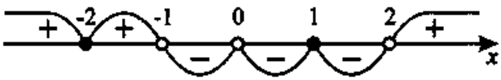


Если требуется уточнить эскиз графика, то полагая, что $x = 0$, получим $y = -0{,}75$. Ясно, что при рассмотрении дополнительных контрольных точек эскиз графика корректируется, хотя общий характер графика не изменится.

10. $y = \frac{(x^2+x-2)^2}{x^2(x^2-x-2)}$.

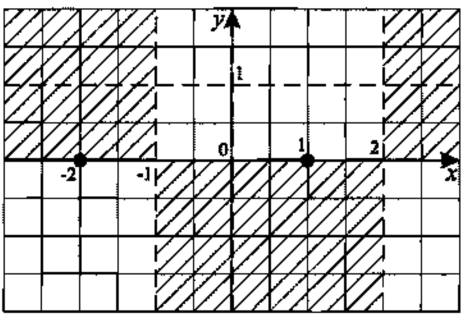
$\frac{(x^2+x-2)^2}{x^2(x^2-x-2)} = \frac{(x+2)^2(x-1)^2}{x^2(x-2)(x+1)}$.

1) $D(y)$: $x \neq 0$; $x \neq 2$; $x \neq -1$.

2) 

3) $x = 0$; $x = 2$; $x = -1$ — вертикальные асимптоты,

$y = 1$ — горизонтальная асимптота.



Выясним пересечение с горизонтальной асимптотой:

$\frac{(x^2+x-2)^2}{x^2(x^2-x-2)} = 1$;

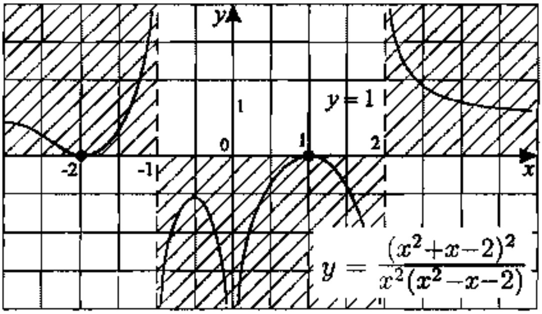
$x^4 + x^2 + 4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x = x^4 - x^3 - 2x^2$;

$3x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

Для решения кубического уравнения необходимо знать формулы Кардано, хотя существование одного корня вытекает из следствий:

$(x \to +\infty) \Rightarrow (3x^3 - x^2 - 4x + 4 \to +\infty)$, а также

$(x \to -\infty) \Rightarrow (3x^3 - x^2 - 4x + 4 \to -\infty)$.



Можно более точно установить, сколько корней имеет $3x^3-x^2-4x+4=0$. $\quad 3x^3=x^2+4x-4$.

Этот вопрос можно решить графически

$y_1=3x^3$,

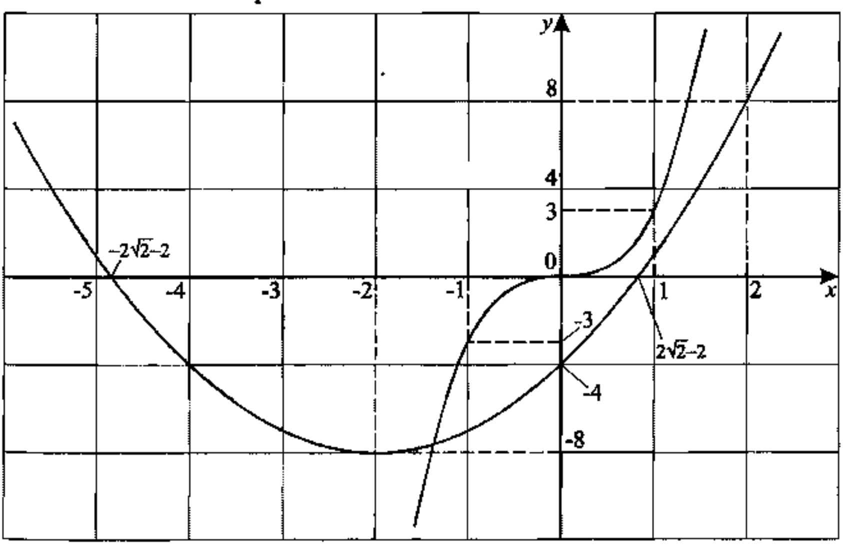
$y_2=x^2+4x-4=(x+2)^2-8$

При $y_2=0$ $\left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{2}-2 \\ x=-2\sqrt{2}-2. \end{array}\right.$

Очевидно существование единственного корня, так как при $x=1$ $y_1(1)=3$, $y_2(1)=1$;

при $x>1$ на $(1;+\infty)$ $y_1=x^3$ растет быстрее, чем $y_2=x^2+4x-4$.

Точек пересечения больше нет.



Наклонная асимптота

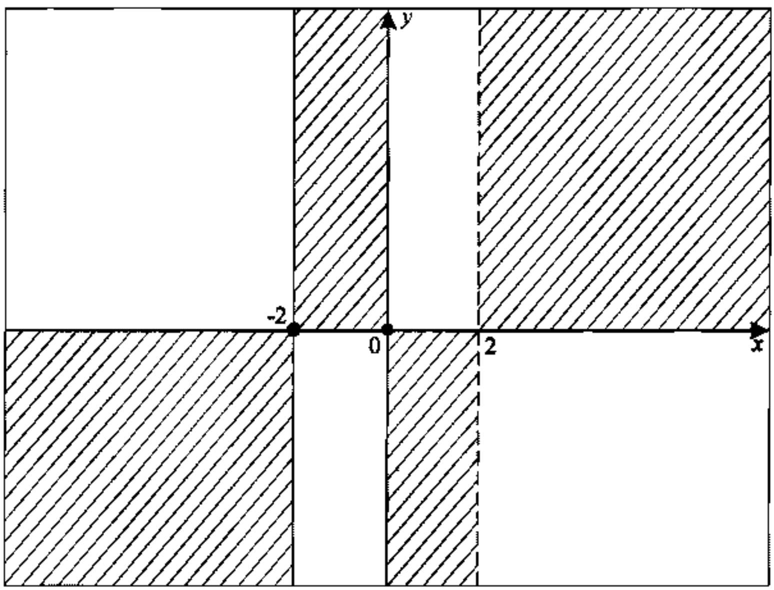
Определение: прямая вида $y = ax + b$ называется наклонной асимптотой, если для $y = f(x)$ из $(x \to \infty) \Rightarrow ((f(x) - (ax + b)) \to 0)$.

Примечание. Наклонная асимптота существует для дробно-рациональной функции, если степень числителя на единицу больше степени знаменателя.

1. $y = \frac{x^2+2x}{x-2}$, т.е. $y = \frac{x(x+2)}{x-2}$.

1) $D(y)$: $x \neq 2$.

2) 



3) $(x \to 2 + 0) \Rightarrow (y \to \infty)$; $(x \to 2 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$, значит, $x = 2$ — вертикальная асимптота.

Но степень числителя больше степени знаменателя на единицу, значит есть наклонная асимптота.

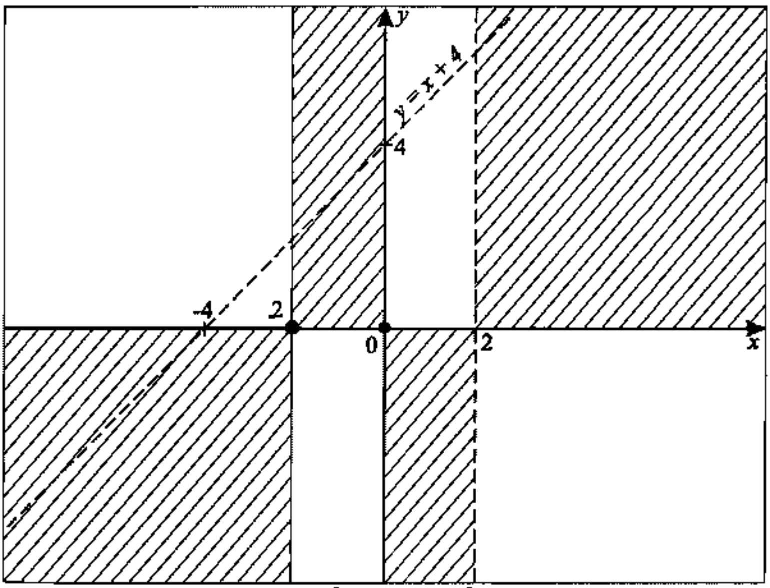
Выделим целую часть делением уголком

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^2+2x \\ x^2-2x \end{array} & \begin{array}{l} x-2 \\ \hline x+4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} -\begin{array}{r} 4x \\ 4x-8 \end{array} \\ \hline 8 \end{array} & \end{array}$$

Таким образом, $\frac{x^2+2x}{x-2} = x + 4 + \frac{8}{x-2}$.

Ясно, что при $(x \to \infty) \Rightarrow \left(\frac{x^2+2x}{x-2} \to (x+4) \right)$.

Наклонную асимптоту обозначим пунктирной прямой.



Так как $y = x + 4 + \frac{8}{x-2}$, где $\frac{8}{x-2} \neq 0$, значит, график не пересекает наклонную асимптоту $y = x + 4$.

При $(x \to \infty)$ график стремится к асимптоте сверху. При $(x \to 2 + 0)$ график стремится к $x = 2$ справа (т. е. при $x > 2$ образует яму).

При $(x \to 2 - 0)$ график стремится к $x = 2$ слева, проходит через корни (нули) функции $x = 0$ и $x = -2$.

При $(x \to -\infty)$ график стремится к $y = x + 4$ снизу (т. е. при $x < 2$ образует горку).

4) Найдем $E(y)$.

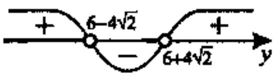
$y = \frac{x^2+2x}{x-2}$;

$yx - 2y = x^2 + 2x$;

$x^2 + (2-y)x + 2y = 0$;

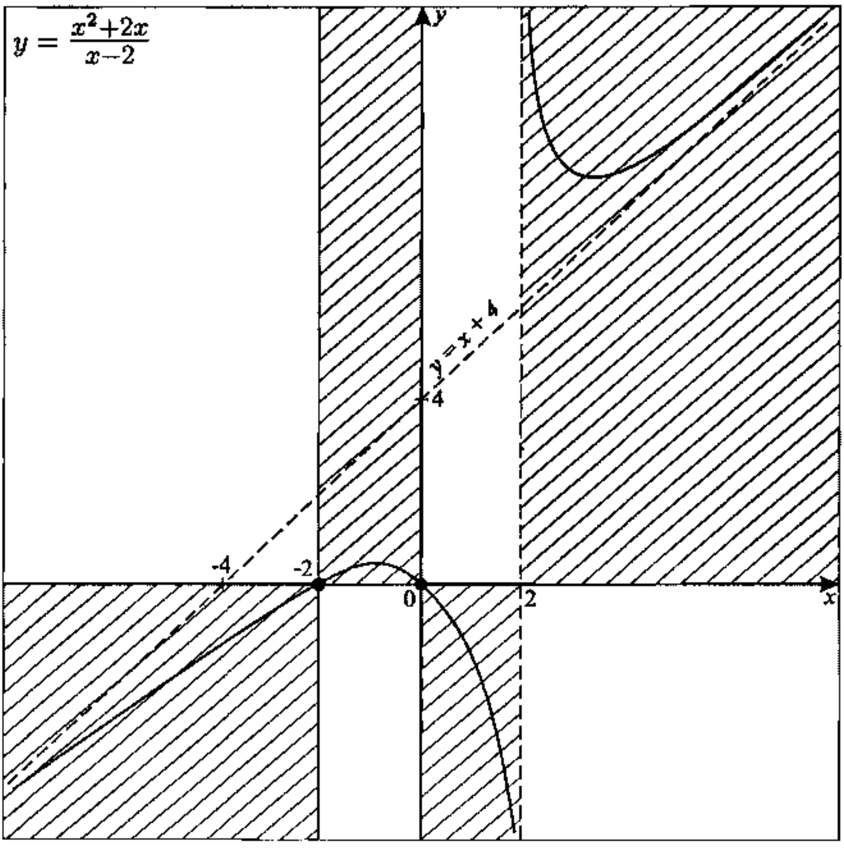
$D = (2-y)^2 - 8y = y^2 - 12y + 4 \geqslant 0$;

$y_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36-4} = 6 \pm 4\sqrt{2}$.



Следовательно, $E(y) = (-\infty; 6 - 4\sqrt{2}] \cup [6 + 4\sqrt{2}; \infty)$.

Эскиз графика готов.



2. $y = \frac{x^3-3x^2+2x-1}{x^2+x-2}$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 + 2x - 1 & x^2 + x - 2 \\
\underline{x^3 + x^2 - 2x} \quad & \overline{x - 4} \\
-4x^2 + 4x - 1 & \\
\underline{-4x^2 - 4x + 8} & \\
8x - 9 &
\end{array}
$$

Таким образом, $\frac{x^3-3x^2+2x-1}{x^2+x-2} = x - 4 + \frac{8x-9}{x^2+x-2}$.

Выясним, при каких x график функции пересекает наклонную асимптоту. Это возможно только, если дробь $\frac{8x-9}{x^2+x-2} = 0$, т. е. при $x = 1{,}125$.

3. $y = \frac{x^4-5x^2+4}{x^2+x+1}$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 5x^2 + 4 & x^2 + x + 1 \\
\underline{x^4 + x^3 + x^2} \quad\quad & \overline{x^2 - x - 5} \\
-x^3 - 6x^2 + 4 & \\
\underline{-x^3 - x^2 - x} \quad & \\
-5x^2 + x + 4 & \\
\underline{-5x^2 - 5x - 5} & \\
6x + 9 &
\end{array}
$$

Так как степень числителя на два больше степени знаменателя, здесь асимптотической кривой является уже парабола $y = x^2 - x - 5$.

График $y(x)$ пересекает асимптотическую параболу при $6x + 9 = 0$; $x = -1{,}5$.

Примечание. Общий план исследования функции с наклонной асимптотой или асимптотической кривой, естественно, не изменяется.

В дальнейшем мы рассмотрим примеры графиков с асимптотическими кривыми (в виде параболы, гиперболы).

Тренировочная работа

Исследуйте функции и постройте графики.

1. $y = \frac{x^2+2x-3}{x-2}$.

2. $y = \frac{x^3}{x^2-x-2}$.

3. $y = \frac{x^4-5x^2+4}{x^3-9x}$.

4. $y = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x^2+1}$.

5. $y = \frac{(x^2-6x+9)(x^2+6x+9)}{(x+1)^3}$.

6. $y = \frac{x^2-4x-5}{x-2}$.

7. $y = \frac{x^2-4}{x^3-9x}$.

8. $y = \frac{x^3+1}{x}$.

9. $y = \frac{x^3-x^2-9x+9}{(x+1)^2}$.

10. $y = \frac{(x^2-2x-8)(x^2-9)}{\frac{1}{4}(x^2-x^4)}$.

11. $y = e^{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$.

12. $y = \frac{e^x}{x^2-2x-3}$.

13. $y = \log_2(6 - x - x^2)$.

14. $y = e^{\frac{x^2}{x^2-2x-3}}$.

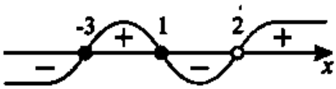
15. $y = e^{\frac{x-x^3}{(x-3)(x+1)(x+2)}}$.

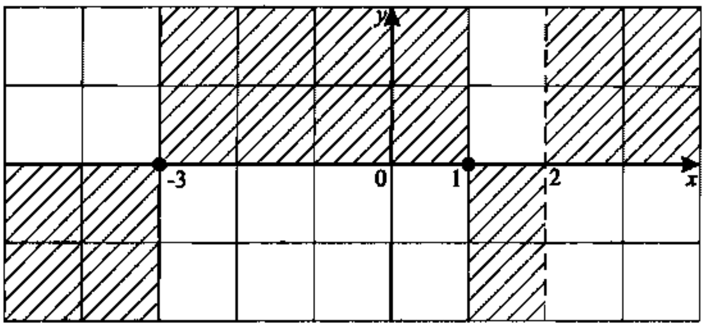
Решение тренировочной работы

1. $y = \frac{x^2+2x-3}{x-2}$.

$y = \frac{(x+3)(x-1)}{x-2}$.

1) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;

2) 



3) $(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;.
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2+2x-3 & x-2 \\ \underline{x^2-2x} & \overline{x+4} \\ -\,4x-3 & \\ \underline{4x-8} & \\ 5 & \end{array}$$

$y = x + 4$ — наклонная асимптота.

$y = x + 4 + \frac{5}{x-2}$;

$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to x+4)$.

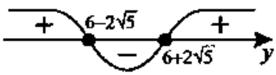
Так как $\frac{5}{x-2} \neq 0$, то пересечения графика $y(x)$ с наклонной асимптотой нет.

4) Выясним $E(y)$ для $y = \frac{x^2+2x-3}{x-2}$.

$yx - 2y = x^2 + 2x - 3$; $x^2 + (2-y)x + 2y - 3 = 0$;

$D = (2-y)^2 - 4(2y-3) = y^2 - 12y + 16 \geqslant 0$;

$y_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 16} = 6 \pm 2\sqrt{5}.$



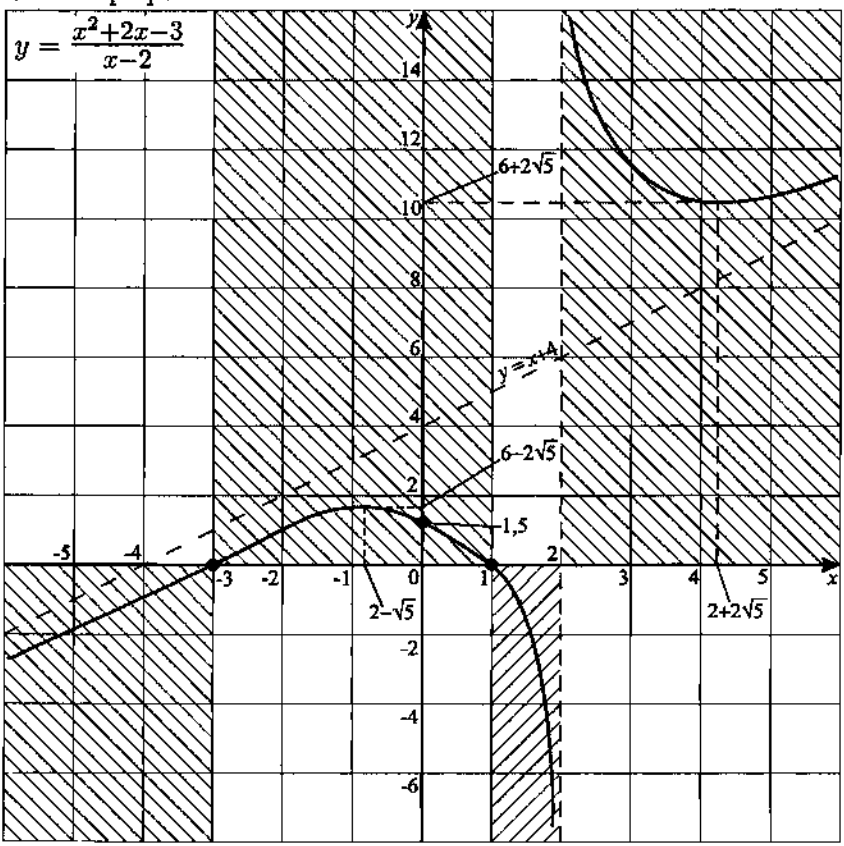
$E(y) = (-\infty; 6 - 2\sqrt{5}] \cup [6 + 2\sqrt{5}; +\infty).$

Для $x^2 + (2 - y)x + 2y - 3 = 0$ $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы, т. е. $x_0 = \frac{y-2}{2}$.

Пусть $y_1 = 6 + 2\sqrt{5}$, $x_1 = \frac{6+2\sqrt{5}-2}{2} = 2 + \sqrt{5}$;

$y_2 = 6 - 2\sqrt{5}$, $x_2 = \frac{6-2\sqrt{5}-2}{2} = 2 - \sqrt{5}$.

Эскиз графика:

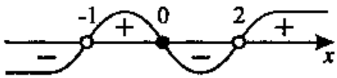


Обратите внимание, что деления на осях разномасштабны.

2. $y = \frac{x^3}{x^2-x-2}$.

Так как $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, то $y = \frac{x^3}{(x-2)(x+1)}$.

1) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$;

2) 

3) $(x \to 2{+}0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 2{-}0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -1{+}0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -1{-}0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^3 & x^2-x-2 \\
\cline{3-3}
 & \underline{x^3 - x^2 - 2x} & x+1 \\
- & x^2 + 2x & \\
 & \underline{x^2 - x - 2} & \\
 & 3x + 2 &
\end{array}
$$

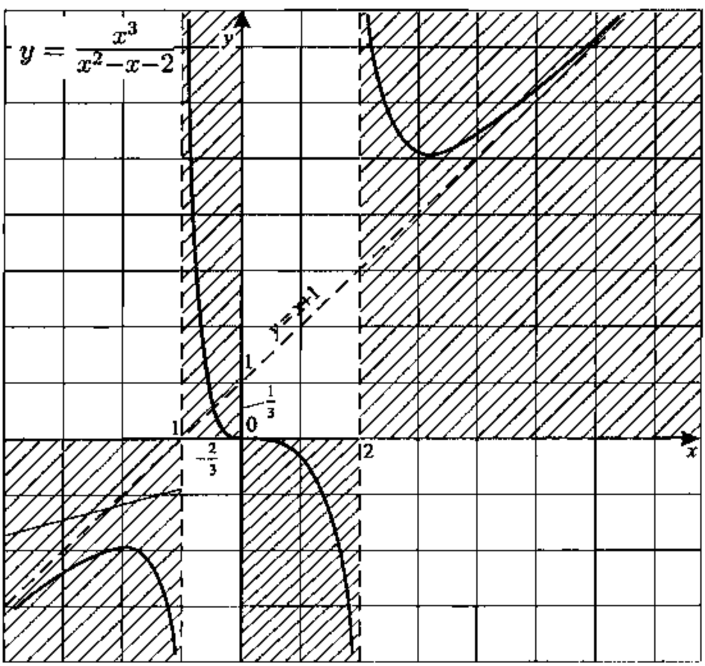
$x = -1$, $x = 2$ — вертикальные асимптоты,

$y = x + 1$ — наклонная асимптота.

$y = \frac{x^3}{x^2-x-2} = x + 1 + \frac{3x+2}{x^2-x-2}$.

При $3x + 2 = 0$ $x = -\frac{2}{3}$.

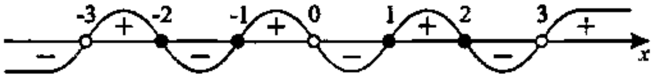
График $y(x)$ пересекает наклонную асимптоту.



3. $y = \frac{x^4-5x^2+4}{x^3-9x}$.

$y = \frac{(x-2)(x+2)(x+1)(x-1)}{x(x+3)(x-3)}$.

1) $D(y)$: $x \neq \pm 3$; $x \neq 0$.

2) 

3)
$$(x \to 3+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to 3-0) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to -\infty).$$

$x = 0$; $x = 3$; $x = -3$ — вертикальные асимптоты.

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4 - 5x^2 + 4 & x^3 - 9x \\ \cline{2-2} \underline{x^4 - 9x^2} & x \\ 4x^2 + 4 & \end{array}$$

$y = x$ — наклонная асимптота.

$y = x + \frac{4x^2+4}{x^3-9x}$.

Так как $4x^2 + 4 \neq 0$ для всех x, то пересечения графика функции и асимптоты нет.

4) Так как $y(-x) = \frac{(-x)^4-5(-x)^2+4}{(-x)^3-9(-x)} = -\frac{x^4-5x^2+4}{x^3-9x} =$ $= -y(x)$, то функция — нечетная.

Значит график — центрально-симметричен относительно начала координат.

5) Контрольные точки:

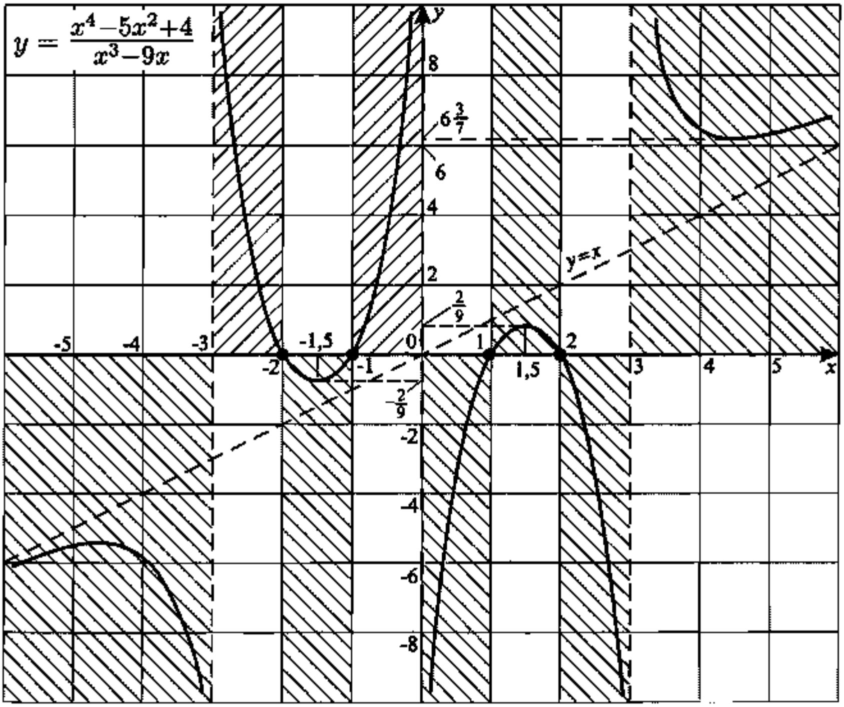
$x = -4;\ y = -6\frac{3}{7};$

$x = 4;\ y = 6\frac{3}{7};$

$x = 1{,}5;\ y \approx \frac{2}{9};$

$x = -1{,}5;\ y \approx -\frac{2}{9}.$

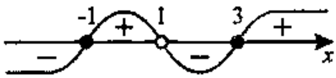
Эскиз графика:



Обратите внимание, деления на осях разномасштабны.

4. $y = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x^2+1}$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) 

3) $(x+1)(x-1)(x-3) = (x^2-1)(x-3) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

$$\begin{array}{r|l} -\; x^3 - 3x^2 - x + 3 & x^2 + 1 \\ \underline{x^3 + x} & \overline{x - 3} \\ -\; -3x^2 - 2x + 3 & \\ \underline{-3x^2 - 3} & \\ -2x + 6 & \end{array}$$

$y = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x^2+1} = x - 3 + \frac{6-2x}{x^2+1}$.

$y = x - 3$ — наклонная асимптота.

При $6 - 2x = 0$; $x = 3$ график пересекает наклонную асимптоту.

4) Вертикальной асимптоты нет,

так как $x^2 + 1 \neq 0$ для всех x.

5) Контрольные точки:

$x = 0$; $y = 3$;

$x = 4$; $y = \frac{15}{17}$,

т. е. график ниже асимптоты на интервале $(3; +\infty)$.

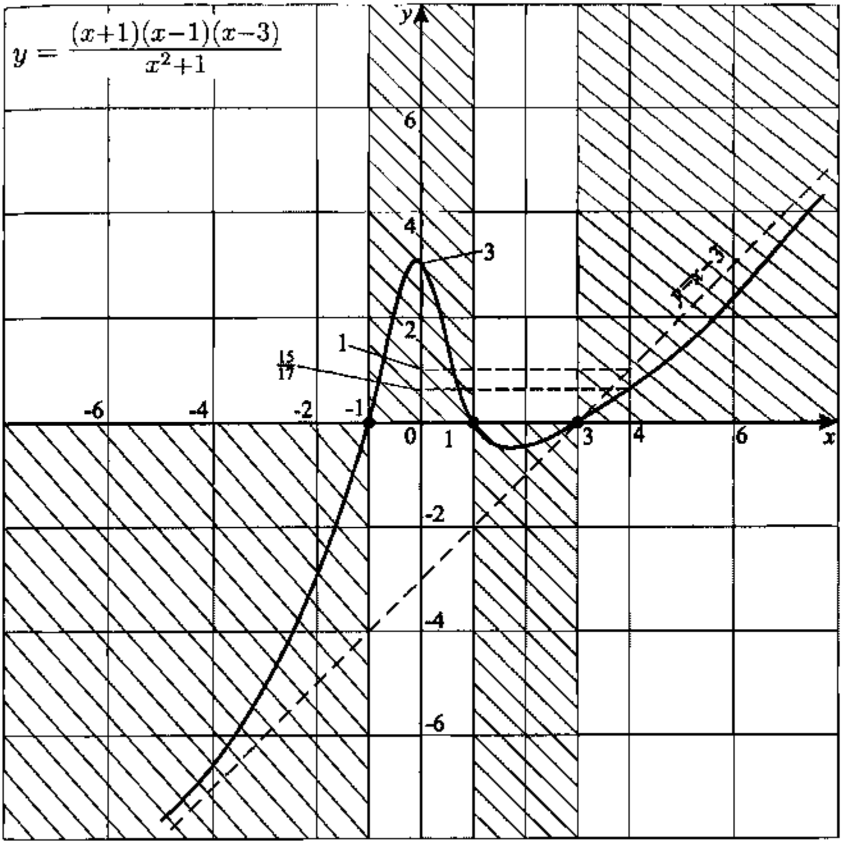
Выясним в точке $(3; 0)$: график функции касается прямой $y = x - 3$ или пересекает ее.

$y = x - 3$;

$y_1 = 4 - 3 = 1$.

Очевидно, пересекает,

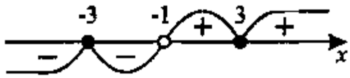
так как $y(4) = \frac{(4+1)(4-1)(4-3)}{4^2+1} = \frac{15}{17} < 1$.


$y = \dfrac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x^2+1}$
y
x
6
4
2
-2
-4
-6
-6
-4
-2
-1
0
1
3
4
6
3
1
$\frac{15}{17}$
$y = x - 3$

5. $y = \frac{(x^2-6x+9)(x^2+6x+9)}{(x+1)^3}$.

$\frac{(x^2-6x+9)(x^2+6x+9)}{(x+1)^3} = \frac{(x-3)^2(x+3)^2}{(x+1)^3}$.

1) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

2) 

3) $(x^2 - 6x + 9)(x^2 + 6x + 9) = x^4 - 18x^2 + 81$

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4 - 18x^2 + 81 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ \cline{2-2} x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x & x - 3 \\ \hline -\,-3x^3 - 21x^2 - x + 81 & \\ -3x^3 - 9x^2 - 9x - 3 & \\ \hline -12x^2 + 8x + 84 & \end{array}$$

$y = x - 3 - \frac{4(3x^2-2x-21)}{(x+1)^3}$;

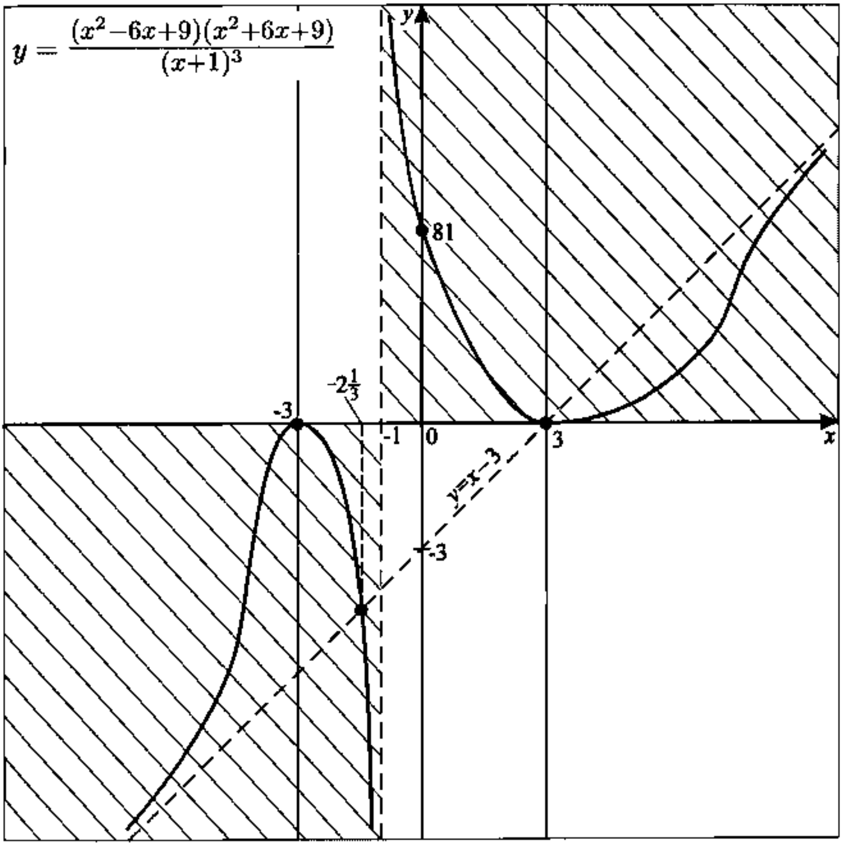
$3x^2 - 2x - 21 = 0$;

$x = 3$; $x = -\frac{7}{3}$ — абсциссы точек пересечения асимптоты с графиком.

4) $x = -1$ — вертикальная асимптота, так как
$(x \to -1 + 0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -1 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

5) $x = 0$; $y = 81$.

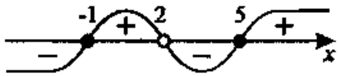
Эскиз графика:



Деления на осях разномасштабны.

6. $y = \frac{x^2-4x-5}{x-2}$.

1) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2) 

3) $$\begin{array}{r|l} -\,x^2-4x-5 & x-2 \\ \underline{x^2-2x} & \overline{x-2} \\ -\,-2x-5 & \\ \underline{-2x+4} & \\ -9 & \end{array}$$

$y = x - 2 - \frac{9}{x-2}$;

$y = x - 2$ — наклонная асимптота.

Очевидно, что график функции не пересекает наклонную асимптоту.

4) $x = 2$ — вертикальная асимптота, так как

$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;

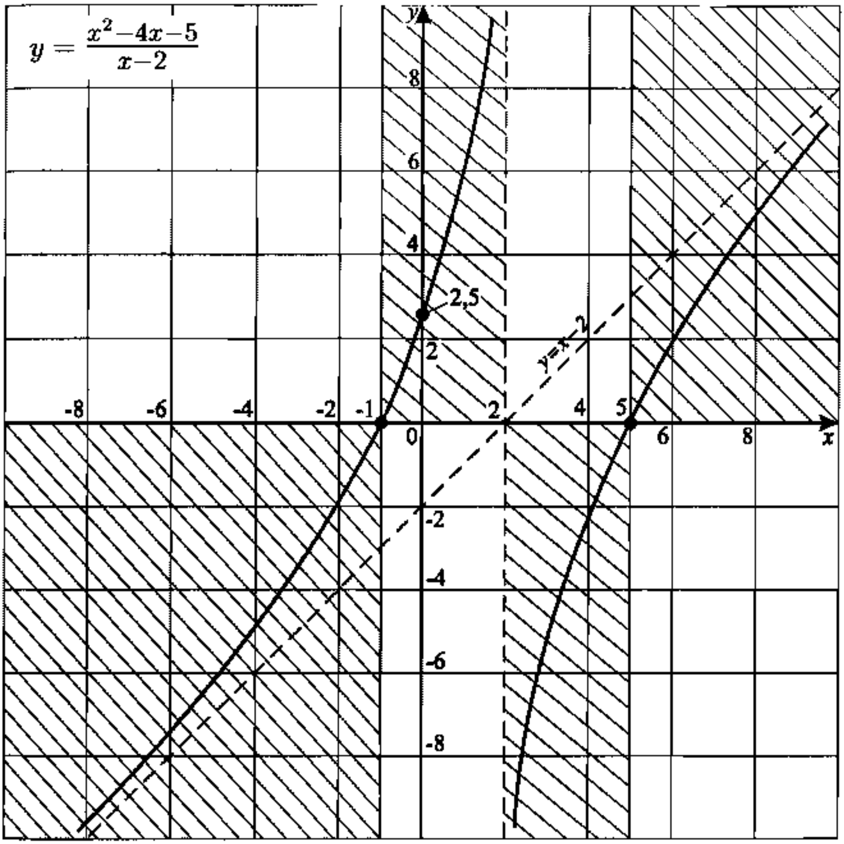
$(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

5) $yx - 2y = x^2 - 4x - 5$; $x^2 - (4+y)x + 2y - 5 = 0$;

$D = (4+y)^2 - 4(2y-5) = y^2 + 36 > 0$ при всех y;

$E(y) = (-\infty; +\infty)$;

6) $x = 0$; $y = 2{,}5$.



Из графического эскиза полезно подчеркнуть, что

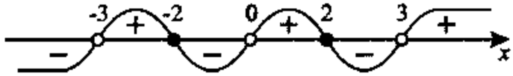
а) функция возрастает на $(-\infty; 2)$;

б) функция возрастает на $(2; \infty)$,

но все же она не является возрастающей функцией.

7. $y = \frac{x^2-4}{x^3-9x}$.

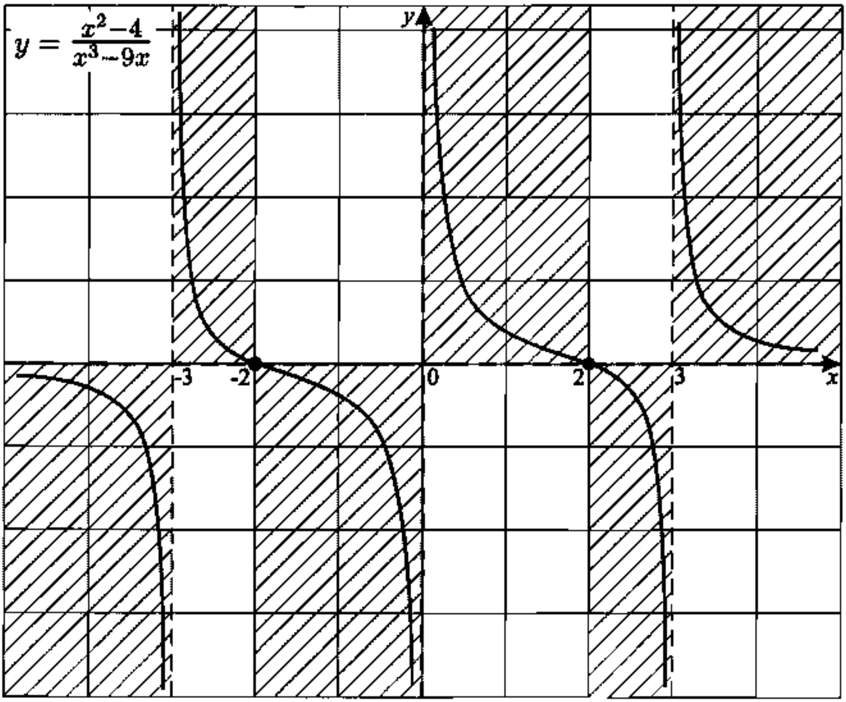
1) $D(y)$: $x \neq \pm 3$; $x \neq 0$.

2) 

3) $x = 3$; $x = -3$; $x = 0$ — вертикальные асимптоты.

4) $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$;

$y = 0$ — горизонтальная асимптота.



Из эскиза графика следует, что функция кусочно-монотонная — на каждом из интервалов непрерывности убывает, но убывающей не является.

8. $y = \frac{x^3+1}{x}$.

$\frac{x^3+1}{x} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x}$.

1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) 

3) $y = \frac{x^3+1}{x} = x^2 + \frac{1}{x}$;

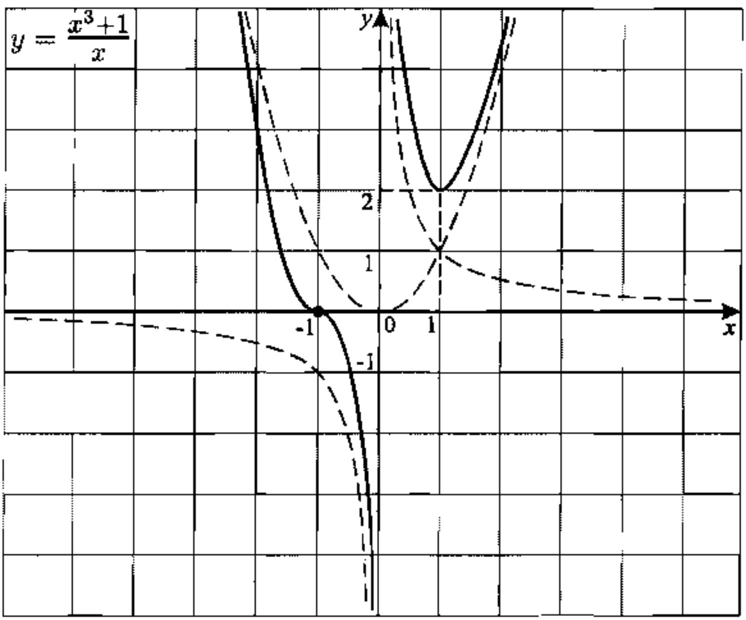
$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;

$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to x^2)$.

Можно и иначе: $(x \to 0) \Rightarrow \left(y \to \frac{1}{x}\right)$.

Итак, имеются две асимптотические кривые: $y = \frac{1}{x}$ и $y = x^2$. Контрольная точка $x = 1$; $y = 2$.



9. $y = \frac{x^3-x^2-9x+9}{(x+1)^2}$.

1) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

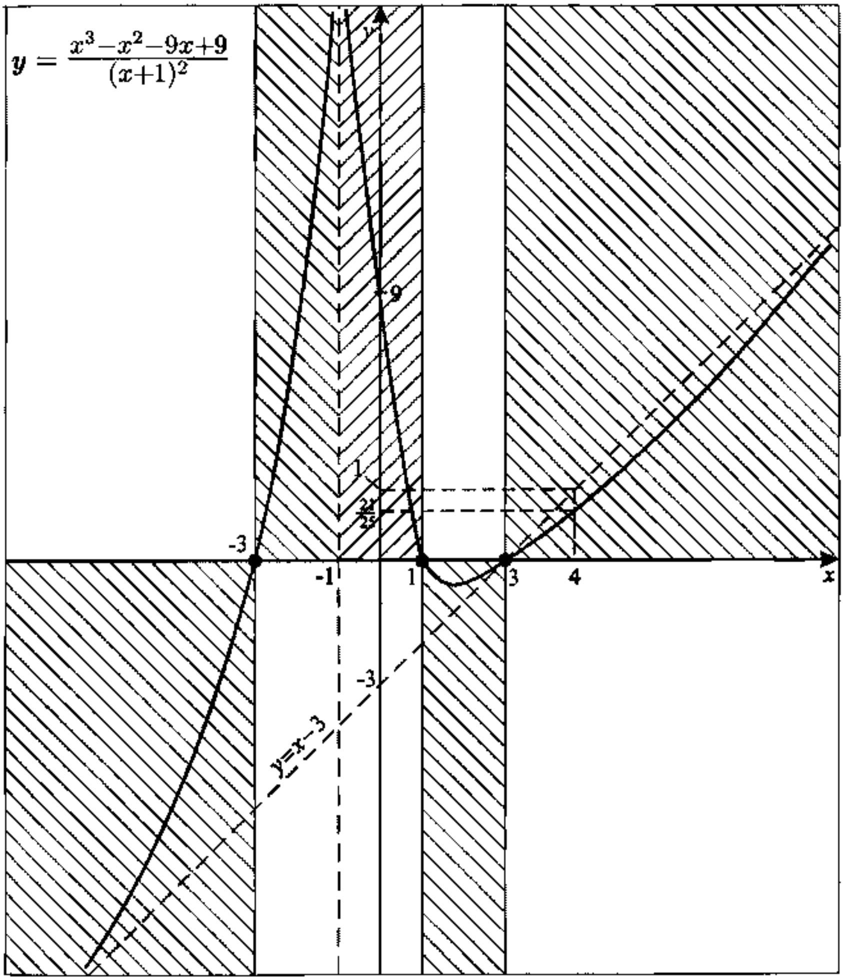
2) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1) =$
$= (x-1)(x-3)(x+3)$;
$y = \frac{(x-1)(x-3)(x+3)}{(x+1)^2}$.

3)
$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 9x + 9 & x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2} -\; x^3 + 2x^2 + x \quad & x - 3 \\ \cline{1-1} -3x^2 - 10x + 9 & \\ -\; -3x^2 - 6x - 3 & \\ \cline{1-1} -4x + 12 & \end{array}$$

а) $y = x - 3 - \frac{4(x-3)}{(x+1)^2}$;
$y = x - 3$ — наклонная асимптота,
так как $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to x - 3)$.

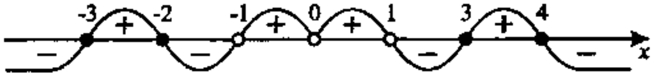
б) Выясним, в точке $(3; 0)$ график функции касается $y = x - 3$ или пересекает ее.
Так как при $x = 4$ $y = \frac{21}{25}$, $\frac{21}{25} < 1$ то пересекает.
$(x \to -1 - 0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -1 + 0) \Rightarrow (y \to +\infty)$,
поэтому $x = -1$ — вертикальная асимптота.

Эскиз графика:



10. $y = \dfrac{(x^2-2x-8)(x^2-9)}{\frac{1}{4}(x^2-x^4)}$.

1) $D(y)$: $x \neq \pm 1$; $x \neq 0$.

2) 

3) $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$ — вертикальные асимптоты.

4) $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to -4)$.

5) $\dfrac{(x^2-2x-8)(x^2-9)}{\frac{1}{4}(x^2-x^4)} = -4$;

$x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 18x + 72 = x^4 - x^2$;

$2x^3 + 16x^2 - 18x - 72 = 0$ $(\varphi(x) = 0)$.

У графика $y = \varphi(x)$:

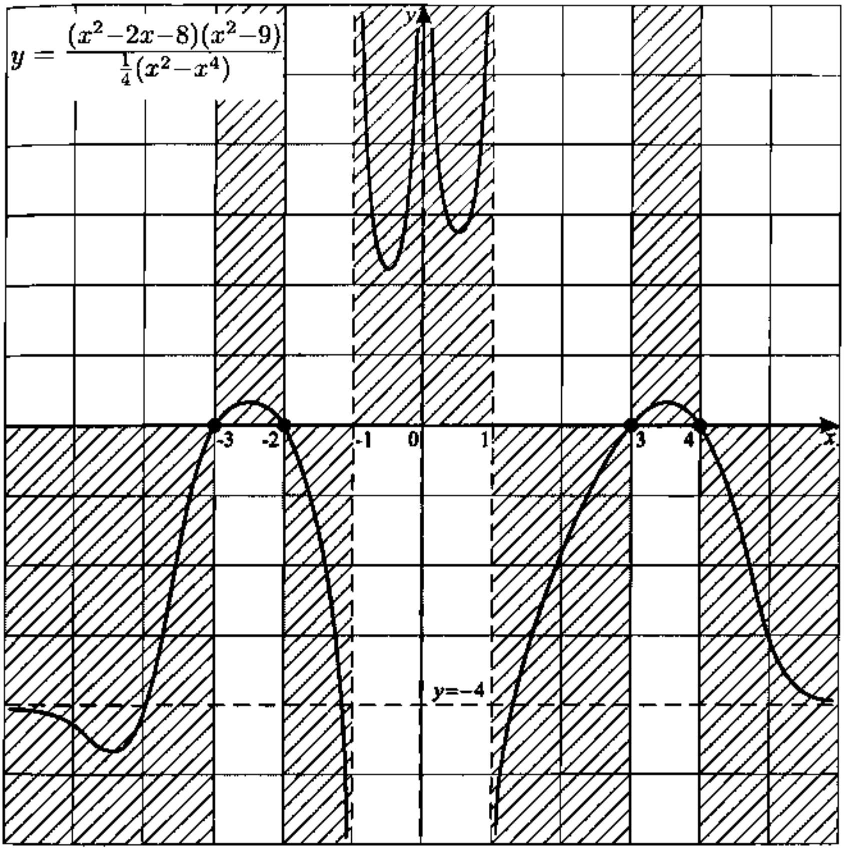
а) на $(-2; -1)$ существует точка пересечения с осью абсцисс, так как $\varphi(-2) > 0$, а $\varphi(-1) < 0$, а значит, существует корень в силу непрерывности;

б) на $(1; 3)$ существует точка пересечения с осью абсцисс, так как также есть корень $(\varphi(1) < 0$, $\varphi(3) > 0)$;

в) $\varphi(-10) < 0$, $\varphi(-3) > 0$, значит, третий корень на $(-10; -3)$.

Более точно это можно сделать, лишь используя формулы Кардано или используя исследование функции с помощью производной.

Непосредственная проверка $y\left(\frac{1}{2}\right) > y\left(-\frac{1}{2}\right)$ делает возможным предположить, что кривая на $(0; 1)$ находится ниже кривой на $(-1; 0)$, хотя точно это возможно утверждать, лишь используя аппарат производных.


$y = \dfrac{(x^2-2x-8)(x^2-9)}{\frac{1}{4}(x^2-x^4)}$
y
x
-3
-2
-1
0
1
3
4
y=−4

11. $y = e^{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$.

I. Построим $t(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

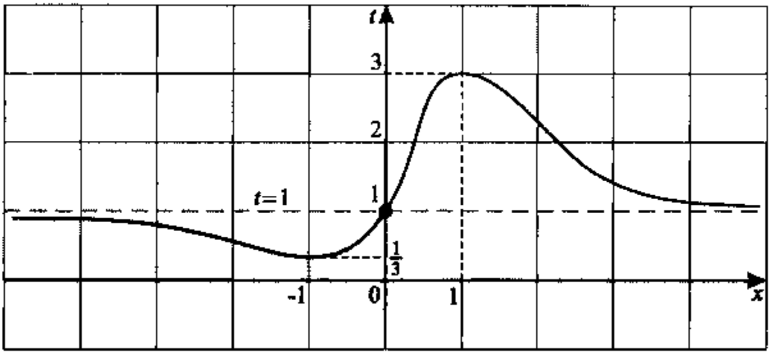
1) $D(t) = (-\infty; +\infty)$,
так как $x^2 - x + 1 > 0$ при всех x, т. к.
$\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -3 < 0. \end{cases}$

2) $t > 0$ при всех x,
так как $x^2 + x + 1 > 0$ при всех x;
$\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -3 < 0. \end{cases}$

3) $(x \to \infty) \Rightarrow (t \to 1)$,
так как $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$, $t = 1$ — горизонтальная асимптота.
$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 1$.
$x = 0$ — абсцисса точки пересечения графика $t(x)$ и $t = 1$.

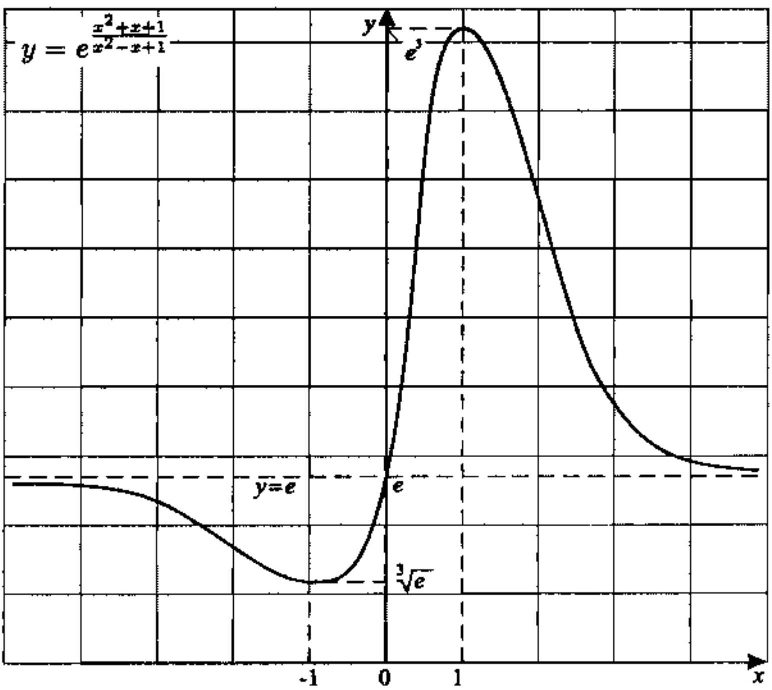
4) Найдем $E(t)$, где $t = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.
$tx^2 - tx + t = x^2 + x + 1$;
$(t-1)x^2 - (t+1)x + t - 1 = 0 \ (t \neq 1)$;
$D = (t+1)^2 - 4(t-1)^2 =$
$= (t + 1 + 2t - 2)(t + 1 - 2t + 2) =$
$= (3t - 1)(3 - t) \geqslant 0.$

Но при $t = 1$ $x = 0$,
тогда $E(t) = \left[\frac{1}{3}; 3\right]$.
$x_0 = -\frac{b}{2a}$; $x_0 = \frac{t+1}{2(t-1)}$.
$t_1 = \frac{1}{3}$, $x_1 = -1$;
$t_2 = 3$, $x_2 = 1$;
$t_{\max} = 3$, $t_{\min} = \frac{1}{3}$.



II. $y = e^{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$. Так как $y = e^x$ — возрастающая, то $y = e^{t(x)}$ повторяет кусочную монотонность $y{=}t(x)$.
$(x \to \infty) \Rightarrow (t \to 1) \Rightarrow (y \to e)$;
$y_{\max} = y(1) = e^3$, $y_{\min} = y(-1) = e^{\frac{1}{3}}$.

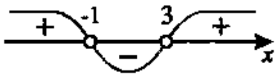
Эскиз графика:



Деления на осях разного масштаба.

12. $y = \frac{e^x}{x^2-2x-3}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq -1. \end{cases}$

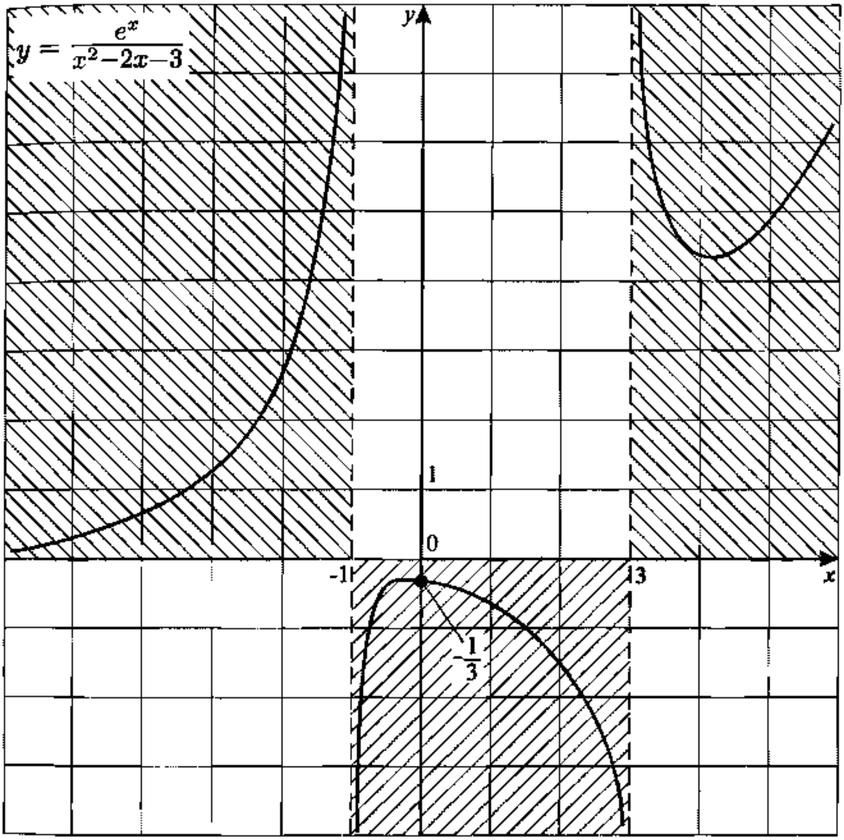
2) 

$y = \frac{e^x}{(x-3)(x+1)}$.

3) $(x \to 3+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -1+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -1-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty)$.

Так как $y = e^x$ растет быстрее, чем $y = x^2 - 2x - 3$, то из $(x \to +\infty) \Rightarrow (\frac{e^x}{x^2-2x-3} \to +\infty)$, но $y = e^x \to 0$ при $(x \to -\infty)$, тогда $(x \to -\infty) \Rightarrow (e^x \to 0) \Rightarrow \left(\frac{e^x}{x^2-2x-3} \to 0\right)$.

4) Можно уточнить эскиз графика контрольными точками.
$x = 0$; $y = -\frac{1}{3}$;
$x = 4$; $y = \frac{e^4}{5} \approx 10{,}9$.
Здесь для нахождения $y_{\max}$ и $y_{\min}$ требуется исследование функции с помощью производной.



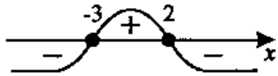
$y = \frac{e^x}{x^2-2x-3}$
y
1
0
-1
3
x
$-\frac{1}{3}$

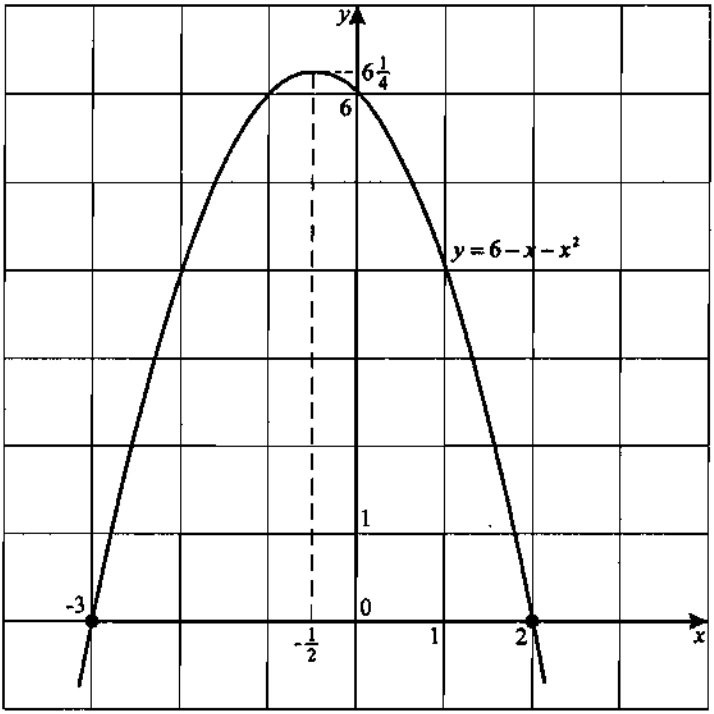
13. $y = \log_2(6 - x - x^2)$.

а) $t(x) = 6 - x - x^2 = -(x^2 + x - 6) = -\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4}\right) =$

$$= -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 6\frac{1}{4}.$$

$t(x) = 0$, $x = -3$; $x = 2$.



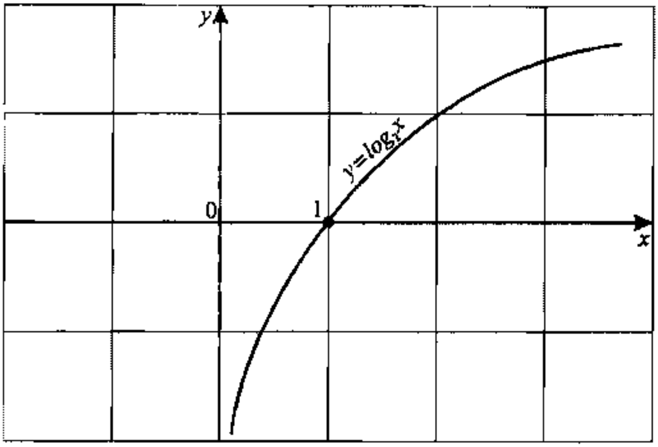


б) $D(y) = (-3; 2)$.

1) Известно, что график $y = \log_2 x$ таков, что $(x \to 0 + 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

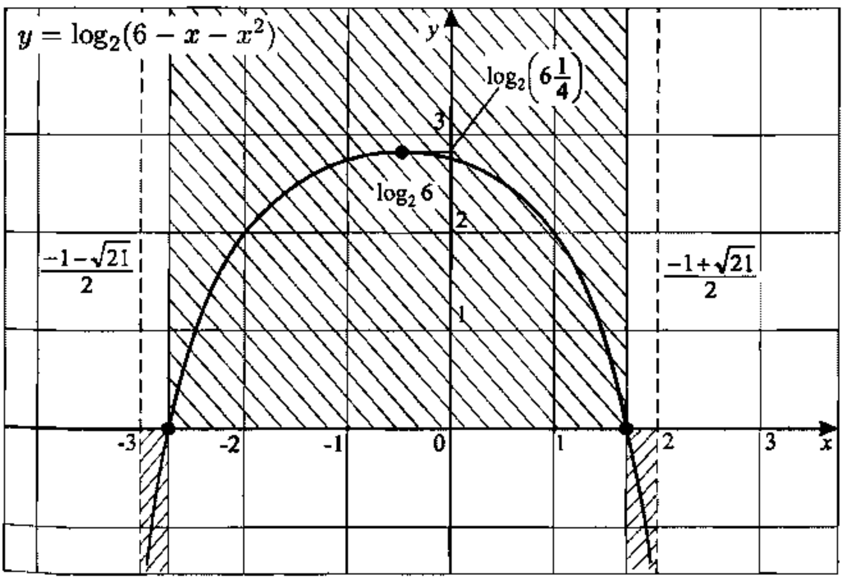
2) Тогда для $y = \log_2(6 - x - x^2)$
$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$ и
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

$t_{\max} = 6\frac{1}{4}$. $y = \log_2 t$ — возрастающая, поэтому $y = \log_2(6 - x - x^2)$ повторяет кусочную монотонность $y = t(x)$.



$y = 0$; $\log_2(6 - x - x^2) = 0$; $x^2 + x - 5 = 0$.

$x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$; $x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$.

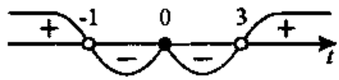


14. $y = e^{\frac{x^2}{x^2-2x-3}}$.

В общем случае $y = e^{\frac{x^2}{x^2-2x-3}}$ не является дробно-рациональной функцией, но введя вспомогательную дробно-рациональную функцию $t(x) = \frac{x^2}{x^2-2x-3}$, можно успешно строить график $y = e^{\frac{x^2}{x^2-2x-3}}$.

I. 1) $t(x) = \frac{x^2}{x^2-2x-3}$;

$D(t)$: $\begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq -1. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 3+0) \Rightarrow (t \to +\infty)$;
$(x \to 3-0) \Rightarrow (t \to -\infty)$;
$(x \to -1+0) \Rightarrow (t \to -\infty)$;
$(x \to -1-0) \Rightarrow (t \to +\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (t \to 1)$,

так как $\frac{x^2}{x^2-2x-3} = \frac{x^2}{x^2\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{1}{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}$;

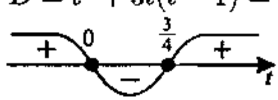
4) $\frac{x^2}{x^2-2x-3} = 1$; $x = -1{,}5$, т. е. точка $(-1{,}5; 1)$ — точка пересечения графиков $t(x)$ и $t = 1$.

5) Выясним $E(t)$.

$t = \frac{x^2}{x^2-2x-3}$; $tx^2 - 2tx - 3t = x^2$;

$(t-1)x^2 - 2xt - 3t = 0$;

$D = t^2 + 3t(t-1) = 4t^2 - 3t = t(4t-3) \geqslant 0$.

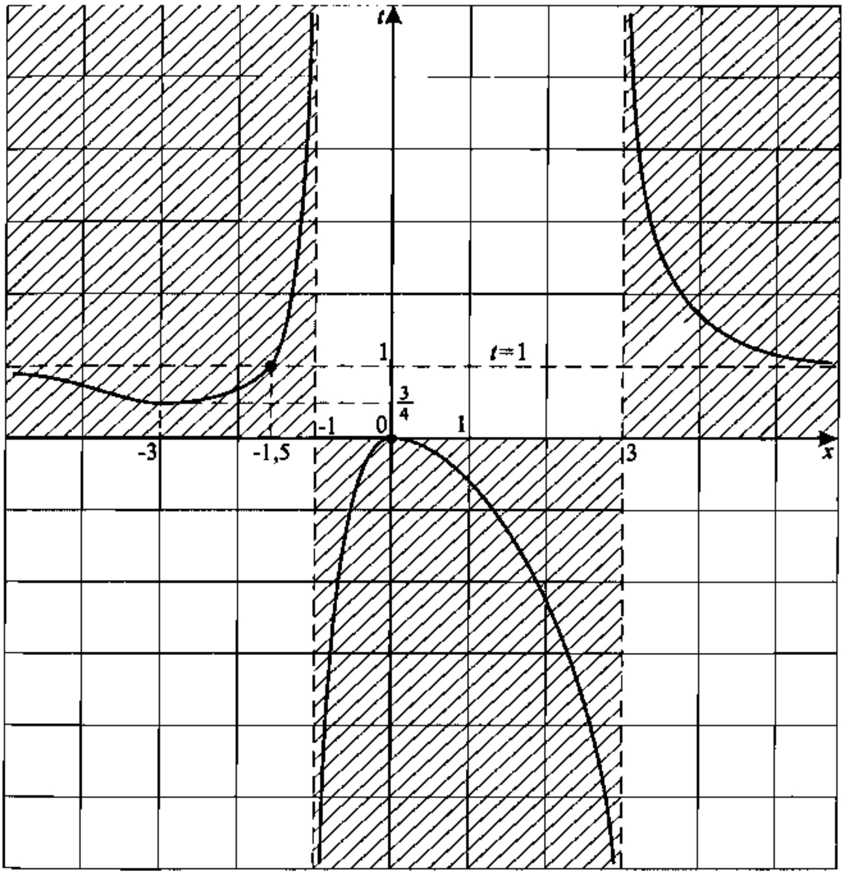


$E(t) = (-\infty; 0] \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

$x_0 = -\frac{b}{2a}$, $x_0 = \frac{t}{t-1}$;

$t_1 = 0$, $x_1 = 0$; $t_2 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}-1} = -3$.

Эскиз графика $t(x) = \frac{x^2}{x^2-2x-3}$ готов.



II. Теперь, зная эскиз графика $t(x) = \frac{x^2}{x^2-2x-3}$, будем строить $y = e^{\frac{x^2}{x^2-2x-3}}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq -1. \end{cases}$

2) $y > 0$ для всех $x \in D(y)$, так как $y = e^{t(x)} > 0$.

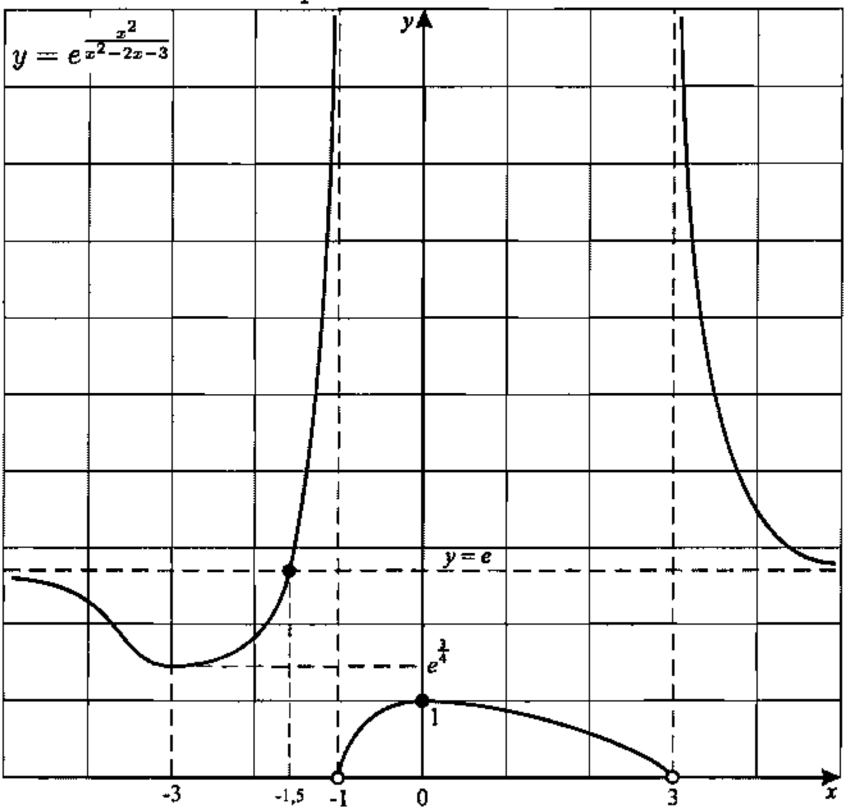
3) $(x \to 3+0) \Rightarrow (t \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty)$,

$(x \to 3-0) \Rightarrow (t \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$,

так как из $(x \to -\infty) \Rightarrow (e^x \to 0)$.

$$(x \to -1+0) \Rightarrow (t \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0);$$
$$(x \to -1-0) \Rightarrow (t \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to \infty) \qquad \Rightarrow (t \to 1) \qquad \Rightarrow (y \to e).$$

4) $t = 1$ при $x = -1{,}5$, значит $y = e$ при $x = -1{,}5$. Если $x_1 = 0$, то $t_1 = 0$, $y_1 = 1$, если $x_2 = -3$, то $t_2 = \frac{3}{4}$, $y_2 = e^{\frac{3}{4}}$. $y_{\min} = e^{\frac{3}{4}}$; $y_{\max} = 1$.



5) Так как $y = e^x$ — монотонно возрастающая, то для $y = e^{t(x)}$ характер кусочной монотонности сохранится тот же, что и для $t(x)$.

Плавно соединяем $A(-1;0)$; $B(0;1)$; $C(3;0)$ и получим горку.

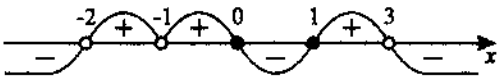
Далее аналогично строим на $(-\infty;-1)$ и на $(3;+\infty)$.

15. $y = e^{\frac{x-x^3}{(x-3)(x+1)(x+2)}}$.

I. Для построения $y(x)$ построим
$t(x) = \frac{x-x^3}{(x-3)(x+1)(x+2)}$.

1) $D(t)$: $\begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2. \end{cases}$

2) $$\frac{x-x^3}{(x-3)(x+1)(x+2)} = \frac{x(1-x)(1+x)}{(x-3)(x+1)(x+2)} =$$
$$= \frac{x(1-x)}{(x-3)(x+2)}.$$

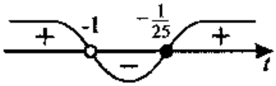


3) Очевидно, что $x = -1$ не является вертикальной асимптотой.
$$(x \to 3+0) \Rightarrow (t \to -\infty);$$
$$(x \to 3-0) \Rightarrow (t \to +\infty);$$
$$(x \to -2+0) \Rightarrow (t \to +\infty);$$
$$(x \to -2-0) \Rightarrow (t \to -\infty);$$
$$(x \to \infty) \Rightarrow (t \to -1).$$

4) $t(-1) = \frac{-(1+1)}{(-1-3)(-1+2)} = \frac{1}{2}$.
Точка $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ исключается из графика $t = t(x)$.
Выясним, существуют ли точки пересечения графика $t = t(x)$ и $t = -1$, или их нет.
$\frac{x(1-x)}{(x-3)(x+2)} = -1;$
$x - x^2 = -x^2 + x + 6;$
$0 = 6,$
т. е. нет общих точек.

5) Найдем $E(t)$.
$t = \frac{x(1-x)}{(x-3)(x+2)};$

$tx^2 - tx - 6t = x - x^2;$
$(t+1)x^2 - (t+1)x - 6t = 0;$
$D = (t+1)^2 + 24t(t+1) = (t+1)(25t+1) \geqslant 0.$



$E(t) = (-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{25}; +\infty\right).$
$x_0 = -\frac{b}{2a}$; $x_0 = \frac{1}{2}$;
$t_1 = -\frac{1}{25}$; $x_1 = \frac{1}{2}$;
$t_{\min} = -\frac{1}{25}$.

6) Можно доказать, что график функции $t = t(x)$ симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}$,
т. е. $\forall a \in D(t)$: $t\left(\frac{1}{2} + a\right) = t\left(\frac{1}{2} - a\right)$.
Действительно,

$$t\left(\frac{1}{2} + a\right) = \frac{(0{,}5+a)(0{,}5-a)(1{,}5+a)}{(a-2{,}5)(a+1{,}5)(a+2{,}5)} = \frac{(0{,}5+a)(0{,}5-a)}{(a-2{,}5)(a+2{,}5)}$$

$(a \neq -1{,}5)$;

$$t\left(\frac{1}{2} - a\right) = \frac{(0{,}5-a)(0{,}5+a)(1{,}5-a)}{-(2{,}5+a)(1{,}5-a)(2{,}5-a)} = \frac{(0{,}5+a)(0{,}5-a)}{(a-2{,}5)(a+2{,}5)}$$

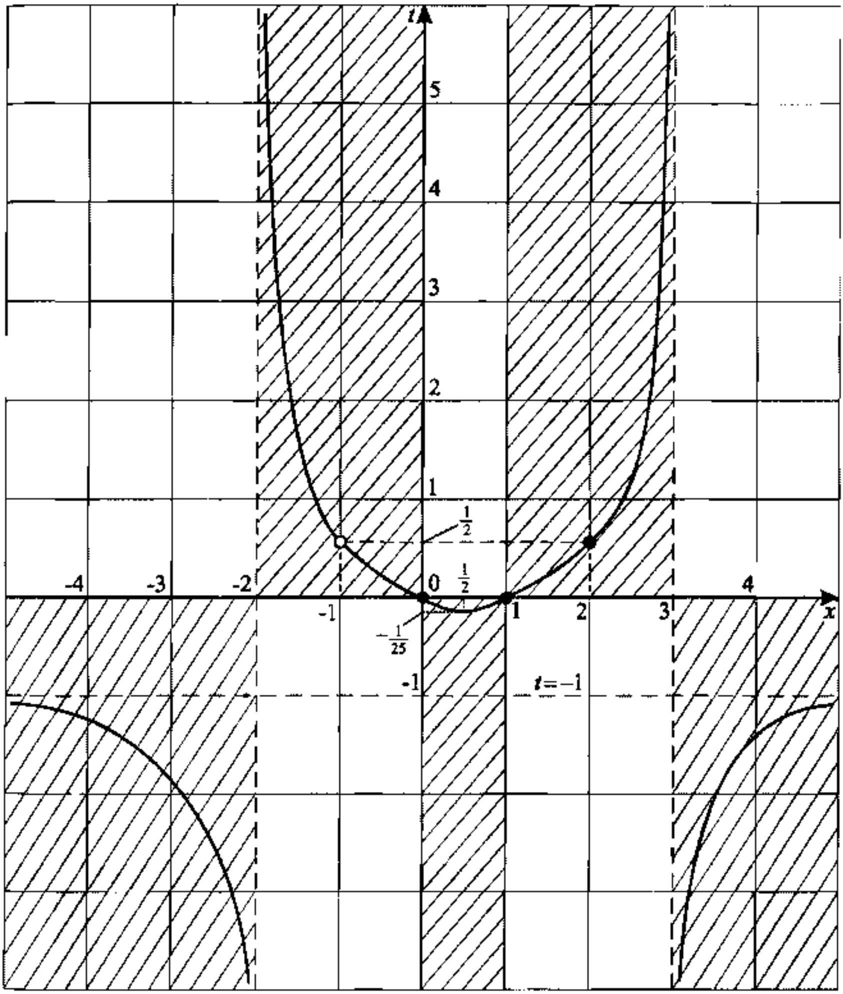
$(a \neq 1{,}5)$.

Подставляя вместо a переменную x, получаем $x \neq -1$ и $x \neq 2$.

Строго говоря, симметрии графика относительно прямой $x = \frac{1}{2}$ нет, так как $2 \in D(y)$, а $-1 \notin D(y)$.

Но если положить $x \neq -1$ и $x \neq 2$, то на этих интервалах график функции $t = t(x)$ симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}$, а тогда и график $y = y(x)$ при этих условиях симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}$.

Эскиз $t(x) = \frac{x-x^3}{(x-3)(x+1)(x+2)}$ готов.



II. Теперь, используя график $y = y(x)$, построим

$y = e^{\frac{x-x^3}{(x-3)(x+1)(x+2)}}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2. \end{cases}$

2) Так как $e^{t(x)} > 0$, то $y > 0$ при всех x из области определения.

3) Так как $x \neq -1$, $y = e^{\frac{x(1-x)}{(x-3)(x+2)}}$.

$(x \to 3+0) \Rightarrow (t \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;

$(x \to 3-0) \Rightarrow (t \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty)$;

$(x \to -2+0) \Rightarrow (t \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty)$;

$(x \to -2-0) \Rightarrow (t \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;

$(x \to \infty) \Rightarrow (t \to -1) \Rightarrow \left(y \to \dfrac{1}{e}\right)$.

4) Контрольные точки:

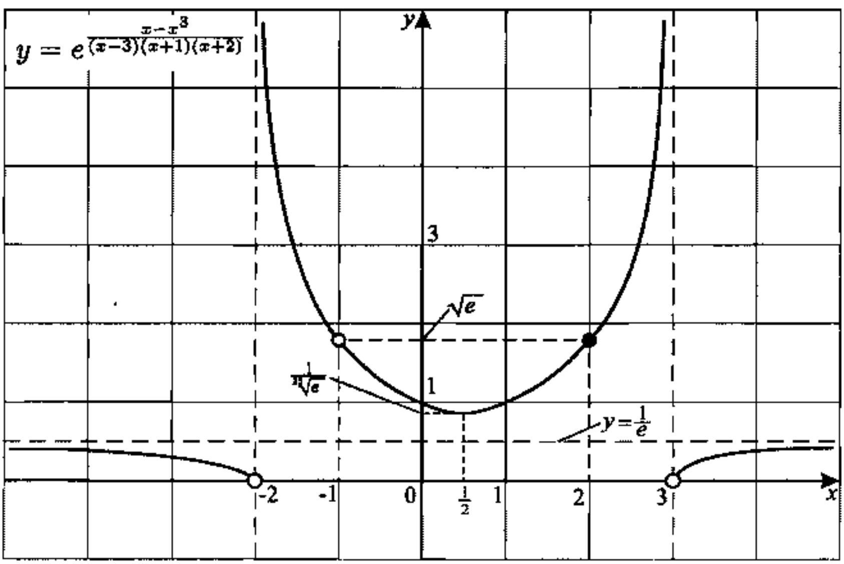
$x_1 = 0;\quad t_1 = 0;\quad y_1 = 1;$

$x_2 = 1;\quad t_2 = 0;\quad y_2 = 1;$

$x_3 = \frac{1}{2};\quad t_3 = -\frac{1}{25};\quad y_3 = e^{-\frac{1}{25}};$

$x_4 = -1;\quad t_4 = \frac{1}{2};\quad y_4 = e^{\frac{1}{2}}.$

$y_{\min} = y(x_3) = e^{-\frac{1}{25}} = y\left(\frac{1}{2}\right)$.



2 Проверочные задания

Условия проверочных заданий

Исследуйте функции и постройте их графики.

1. $y = \frac{x^2-4x}{x^2-9}$.

2. $y = \frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$.

3. $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$.

4. $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$.

5. $y = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$.

6. $y = \frac{x}{x^2-2x-3}$.

7. $y = \frac{1}{x^3-3x}$.

8. $y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x-4)}$.

9. $y = \frac{1}{2x(1-2x^2)}$.

10. $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

11. $y = \frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$.

12. $y = \frac{x^3+2x}{x^2-4}$.

13. $y = \frac{x^3-1}{x}$.

14. $y = \frac{-4x^3+8x}{x^3-1}$.

15. $y = \frac{(x-3)(x^2+3x+2)}{x(x^2-3x+2)}$.

16. $y = \frac{x(x^2-3x+2)}{(x-3)(x^2+3x+2)}$.

17. $y = \frac{x^2+x-2}{x-3}$.

18. $y = \frac{3x^3}{3x^2+4x-4}$.

19. $y = \frac{(x-6)^2}{x^5-3x^3+2x^2}$.

20. $y = \frac{x^4-2x^2-3}{x^4-5x^2+4}$.

21. $y = \frac{x^4-5x^2+4}{x^3+9x}$.

22. $y = \frac{x^3-9x}{x^2+x+2}$.

23. $y = \frac{-4x^3+12x}{x^2+x-2}$.

24. $y = \frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^3-4x}$.

25. $y = \frac{1}{x^2(x^2-3x+2)}$.

26. $y = \frac{x^2(x^2-3x+2)}{(x+3)(x+1)}$.

27. $y = e^{\frac{x^3-3x}{x^4-5x^2+4}}$.

28. $y = \frac{x+3}{x^4-5x^2+4}$.

29. $y = e^{\frac{x^3-3x}{x^2-x-2}}$.

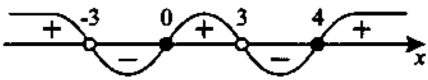
30. $y = e^{\frac{1}{\sin x}}$.

Решения проверочных заданий

1. $y = \frac{x^2-4x}{x^2-9}$.

1) $D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

2) $y = \frac{x(x-4)}{(x+3)(x-3)}$.



3) $(x \to 3+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 3-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;

$\frac{x^2-4x}{x^2-9} = \frac{1-\frac{4}{x}}{1-\frac{9}{x^2}}$.

Итак, из $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$;

$y = 1$ — горизонтальная асимптота.

Выясним, пересекает ли горизонтальная асимптота график $y = y(x)$.

Для этого решим уравнение $y(x) = 1$.

$\frac{x^2-4x}{x^2-9} = 1$,

$x^2 - 4x = x^2 - 9$,

$x = 2{,}25$.

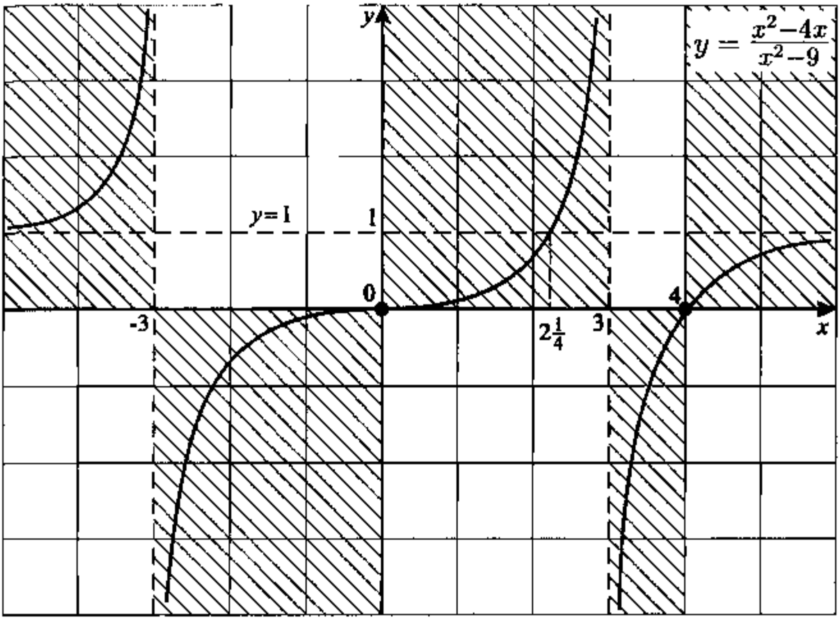
4) Отметим, что функция кусочно-монотонная и на каждом интервале непрерывности возрастает, т. е.

на $(-\infty; -3)$ $y = y(x)$ возрастает,

на $(-3; 3)$ $y = y(x)$ возрастает,

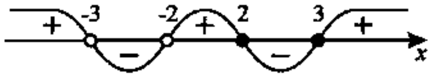
на $(3; \infty)$ $y = y(x)$ возрастает,

но возрастающей функцией не является.


$y = \frac{x^2-4x}{x^2-9}$
y
x
y=1
1
0
-3
$2\frac{1}{4}$
3
4

2. $y = \frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq -3. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$.

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} = \frac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)} = \frac{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}.$$

$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$.

$\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} = 1$, $x = 0$ — абсцисса точки пересечения горизонтальной асимптоты и графика $y = y(x)$;

4) Найдем $E(y)$.

$\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} = y$;

$yx^2 + 5xy + 6y = x^2 - 5x + 6$;

$(y-1)x^2 + 5(y+1)x + 6(y-1) = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{-5(y+1) \pm \sqrt{25(y+1)^2 - 24(y-1)^2}}{2(y-1)} =$$
$$= \frac{-5(y+1) \pm \sqrt{y^2+98y+1}}{2(y-1)};$$

$$y_{1,2} = -49 \pm \sqrt{(49)^2 - 1} = -49 \pm \sqrt{(49-1)(49+1)} =$$
$$= -49 \pm \sqrt{50 \cdot 48} = -49 \pm 5 \cdot 4\sqrt{6} = -49 \pm 20\sqrt{6}.$$

$E(y) = (-\infty; -49 - 20\sqrt{6}] \cup [-49 + 20\sqrt{6}; +\infty)$.

При $D = 0$ $x_0 = -\frac{b}{2a}$, т. е. $x_0 = -\frac{5(y+1)}{2(y-1)}$.

5) При каких x $y = -49 + 20\sqrt{6}$; $y = -49 - 20\sqrt{6}$?

Пусть $y_1 = -49 + 20\sqrt{6}$, тогда

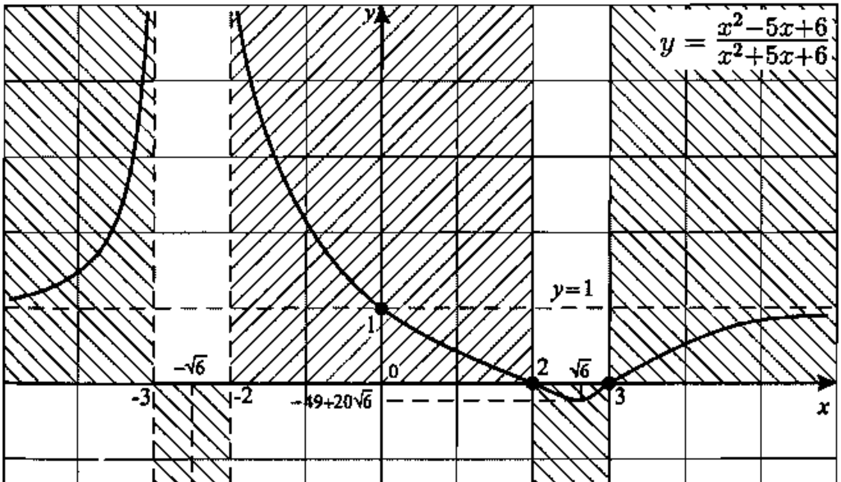
$$x_1 = -\frac{5(-48+20\sqrt{6})}{2(-50+20\sqrt{6})} = -\frac{-12+5\sqrt{6}}{-5+2\sqrt{6}} =$$

$$= -\frac{(-12+5\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})}{(2\sqrt{6})^2-25} = -\frac{-60+60+\sqrt{6}}{24-25} = +\sqrt{6}.$$

Аналогично для $y_2 = -49 - 20\sqrt{6}$:

$$x_2 = -\frac{5(-49-20\sqrt{6}+1)}{2(-49-20\sqrt{6}-1)} = -\frac{5\cdot 4(12+5\sqrt{6})}{2\cdot 10(5+2\sqrt{6})} =$$

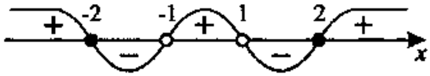
$$= -\frac{(12+5\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})} = -\frac{\sqrt{6}}{25-24} = -\sqrt{6}.$$



3. $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$.

$y = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-1)}$.

1) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) 

3) $$(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to -1+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to -1-0) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1);$$

$\frac{x^2-4}{x^2-1} = 1;$

$x^2 - 4 = x^2 - 1;$

$-4 = -1$; нет решений,

т. е. пересечения нет.

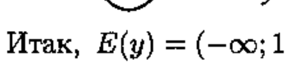
4) Найдем $E(y)$.

$y = \frac{x^2-4}{x^2-1};$

$yx^2 - y = x^2 - 4;$

$(y-1)x^2 = y - 4;$

$x^2 = \frac{y-4}{y-1} \geqslant 0.$



Итак, $E(y) = (-\infty; 1) \cup [4; +\infty)$.

5) Отметим, что

а) $D(y)$ есть симметричное множество;

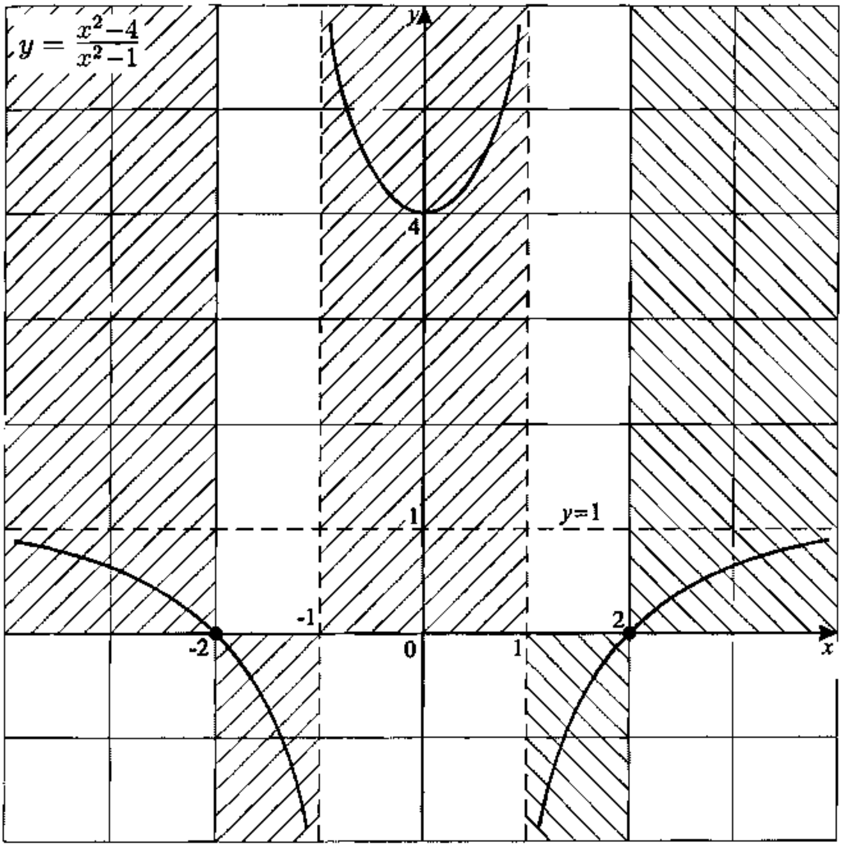
б) для всех x $y(-x) = y(x)$, (функция четная)

т. е. график ее симметричен относительно Oy.

6) Можно точно указать интервалы монотонности:

а) $y = y(x)$ возрастает на $[0; 1)$ и на $(1; \infty)$;

б) $y = y(x)$ убывает на $(-\infty; -1)$ и на $(-1; 0]$.

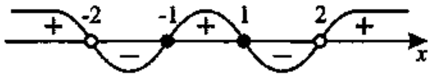


$y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$
y
x
4
1
y=1
-1
-2
0
1
2

4. $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$.

$y = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-2)}$.

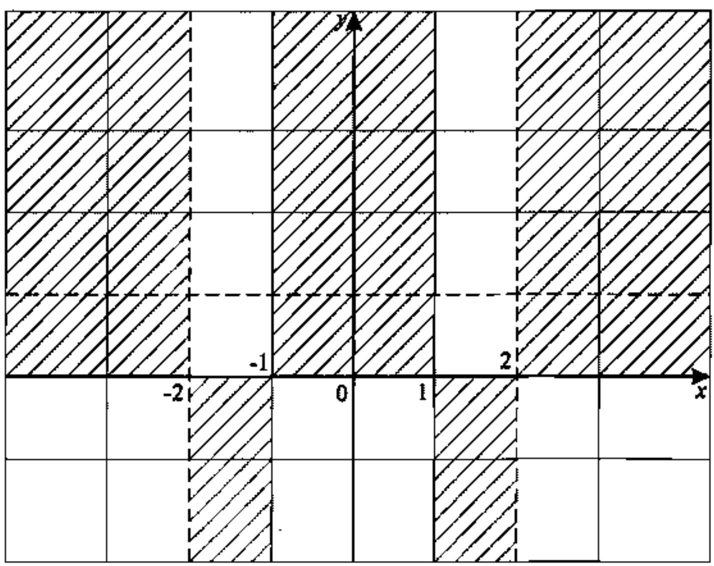
1) $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

2) 

3) $(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;

$\frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}$.

При $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$.



$y = 1$ — горизонтальная асимптота.

$\frac{x^2-1}{x^2-4} = 1$, нет решений, т. е.

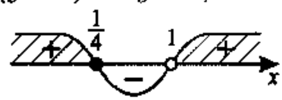
пересечений с горизонтальной асимптотой нет.

4) Найдем $E(y)$.

$y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$;

$yx^2 - 4y = x^2 - 1 \quad x^2(y-1) = 4y - 1$;

$x^2 = \frac{4y-1}{y-1} \geqslant 0.$



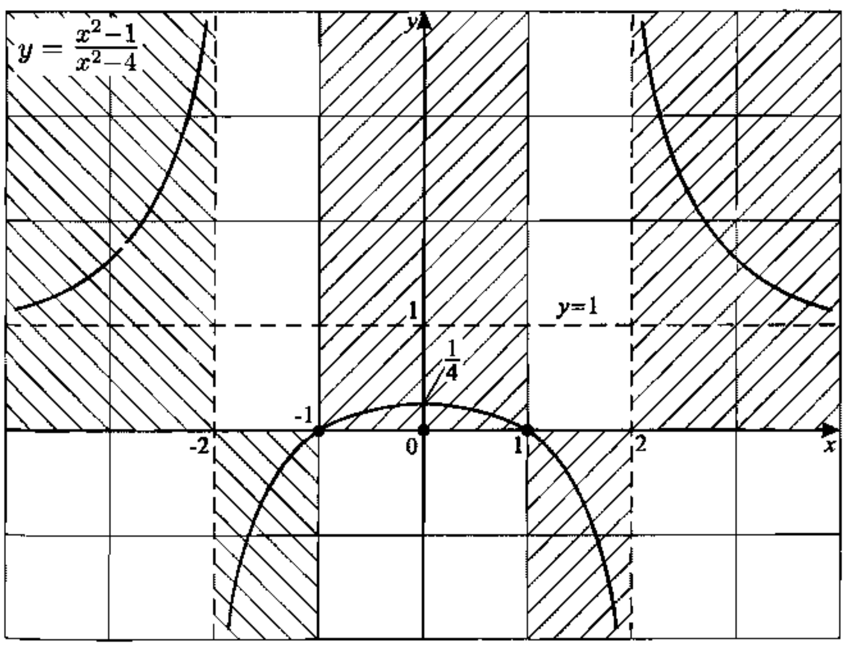
$E(y) = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right] \cup (1; +\infty).$

5) Учитывая, что $y = y(x)$ — четная, график $y = y(x)$ симметричен относительно оси Oy, так как $y(-x) = y(x)$ и $D(y)$ — симметричное множество. И так как $y(0) = \frac{1}{4}$, можно полагать $y(0) = y_{\max} = \frac{1}{4}$.

6) При необходимости эскиз графика можно уточнить, используя контрольные точки:

а) $x = 3$; $y = \frac{9-1}{9-4} = 1{,}6$;

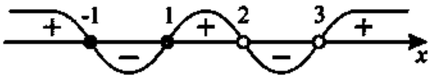
б) в силу четности: $x = -3$; $y = 1{,}6$.



5. $y = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$.

$y = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-3)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq 2. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 3+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;

$\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}$, $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$; $y = 1$ — горизонтальная асимптота.

4) $\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = 1$;
$x^2 - 1 = x^2 - 5x + 6$; $5x = 7$;
$x = 1{,}4$ — абсцисса точки пересечения графика $y = y(x)$ и горизонтальной асимптоты.

5) Найдем $E(y)$.
$y = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$;
$yx^2 - 5xy + 6y = x^2 - 1$;
$(y-1)x^2 - 5xy + 6y + 1 = 0$; $(y \neq 1)$;
$x_{1,2} = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2-4(y-1)(6y+1)}}{2(y-1)} = \frac{5y \pm \sqrt{y^2+20y+4}}{2(y-1)}$;
$D \geqslant 0$; $y^2 + 20y + 4 \geqslant 0$;
$y_{1,2} = -10 \pm 4\sqrt{6}$.

$E(y) = (-\infty; -10 - 4\sqrt{6}] \cup [-10 + 4\sqrt{6}; +\infty)$.

При $D = 0$ $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $x_0 = \frac{5y}{2(y-1)}$.

Пусть $y_1 = -10 - 4\sqrt{6}$; $x_1 = \frac{5y_1}{2(y_1-1)}$.

$$x_1 = \frac{5(-10-4\sqrt{6})}{2(-11-4\sqrt{6})} = \frac{5(5+2\sqrt{6})(11-4\sqrt{6})}{11^2-(4\sqrt{6})^2} =$$

$$= \frac{5(55-48+2\sqrt{6})}{25} = \frac{7+2\sqrt{6}}{5} \approx 2{,}4.$$

Пусть $y_2 = -10 + 4\sqrt{6}$; $x_2 = \frac{5y_2}{2(y_2-1)}$;

$$x_2 = \frac{5(-10+4\sqrt{6})}{2(-11+4\sqrt{6})} = -\frac{5(-10+4\sqrt{6})(11+4\sqrt{6})}{2(11-4\sqrt{6})(11+4\sqrt{6})} =$$

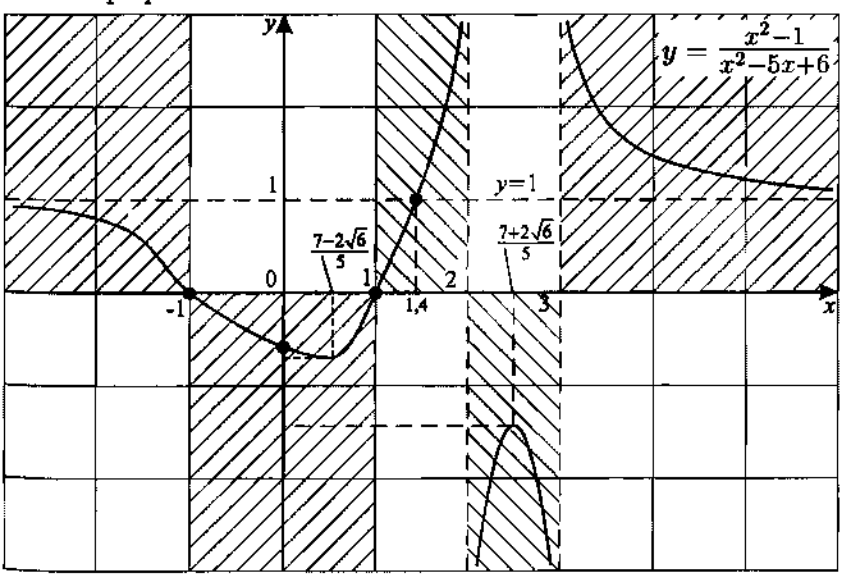
$$= \frac{7-2\sqrt{6}}{5} \approx 0{,}4.$$

б) Контрольные точки $x = 0$; $y = -\frac{1}{6}$.

Выясним, что больше — $-10 + 4\sqrt{6}$ или $-\frac{1}{6}$.

Допустим, $-10 + 4\sqrt{6} < -\frac{1}{6} \iff 4\sqrt{6} < 9\frac{5}{6} \iff 24\sqrt{6} < 59 \iff 576 \cdot 6 < 59^2 \iff 3456 < 3481$ — истина, значит, действительно, $-10 + 4\sqrt{6} < -\frac{1}{6}$.

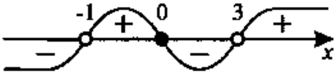
Эскиз графика:



6. $y = \frac{x}{x^2-2x-3}$.

$y = \frac{x}{(x-3)(x+1)}$.

1) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$.

2) 

3) $$(x \to 3+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to 3-0) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$(x \to -1+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to -1-0) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0),$$

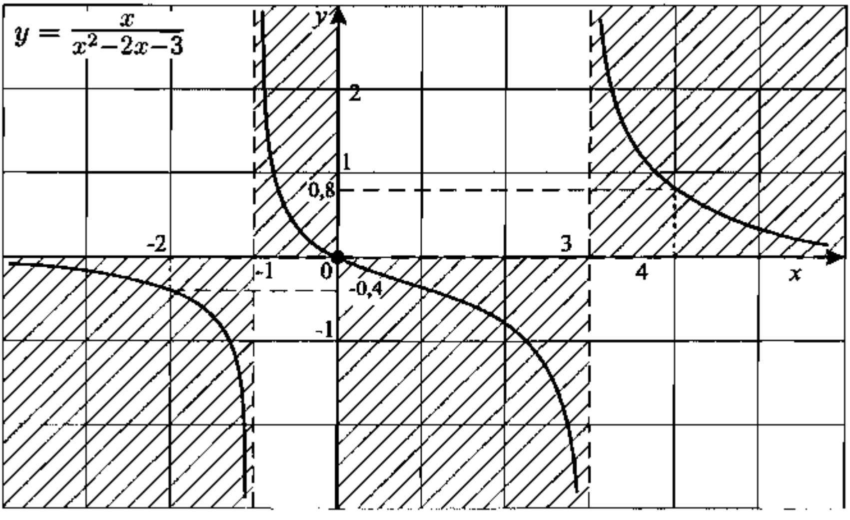
так как степень числителя меньше степени знаменателя;

4) Контрольные точки:

$x = 4;\ y = \frac{4}{(4-3)(4+1)} = 0{,}8;$

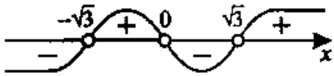
$x = -2;\ y = \frac{-2}{(-2-3)(-2+1)} = -0{,}4.$

Теперь, плавно соединяя известные точки, получим график (эскиз).



7. $y = \frac{1}{x^3-3x}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq \pm\sqrt{3}, \\ x \neq 0. \end{cases}$

2) 

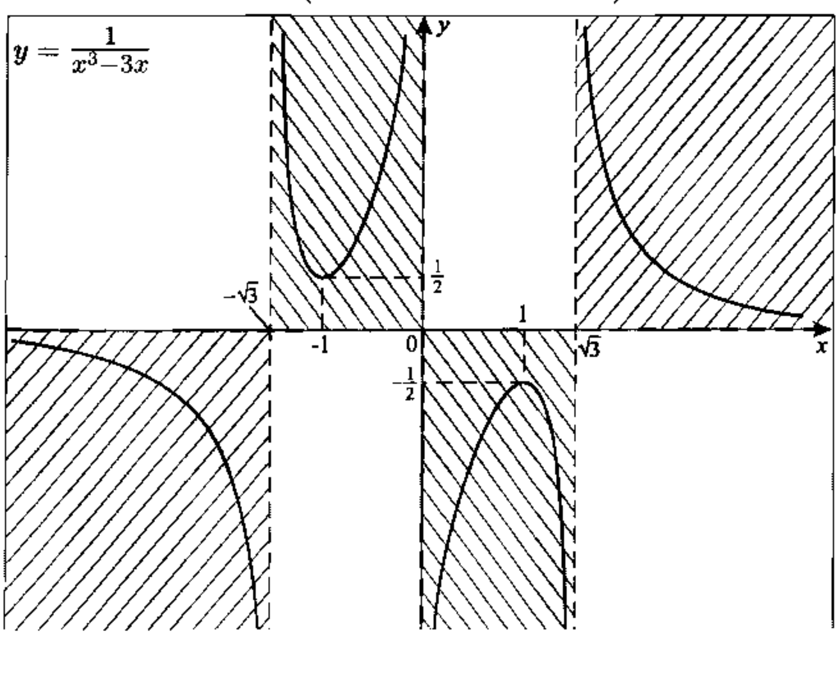
3) $$\begin{aligned} (x \to \sqrt{3}+0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\ (x \to \sqrt{3}-0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\ (x \to 0+0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\ (x \to 0-0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\ (x \to -\sqrt{3}+0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\ (x \to -\sqrt{3}-0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\ (x \to \infty) &\Rightarrow (y \to 0). \end{aligned}$$

4) Контрольные точки:

$x = 2;\ y = \frac{1}{2};\quad x = -1;\ y = \frac{1}{2};$

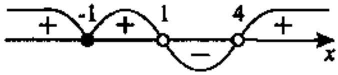
$x = 1;\ y = -\frac{1}{2};\quad x = 2;\ y = -\frac{1}{2}.$

Это эскиз, поэтому глубина ямки и высота горки приближенные (минимаксные значения).



8. $y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x-4)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 4. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 4+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 4-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;

$$\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x-4)} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x}\right)}.$$

Из $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$;

$\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x-4)} = 1$;

$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 5x + 4$;

$x = \frac{3}{7}$.

4) Найдем $E(y)$.

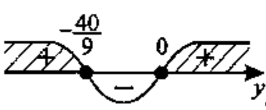
$\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x-4)} = y$;

$x^2 + 2x + 1 = yx^2 - 5xy + 4y$;

$(y-1)x^2 - (5y+2)x + 4y - 1 = 0 \ (y \neq 1)$;

$x_{1,2} = \frac{5y+2 \pm \sqrt{9y^2+40y}}{2(y-1)}$;

$D = 9y^2 + 40y \geqslant 0$.



Но при $y = 1$ $x = \frac{3}{7}$.

$E(y) = \left(-\infty; -\frac{40}{9}\right] \cup [0; +\infty)$.

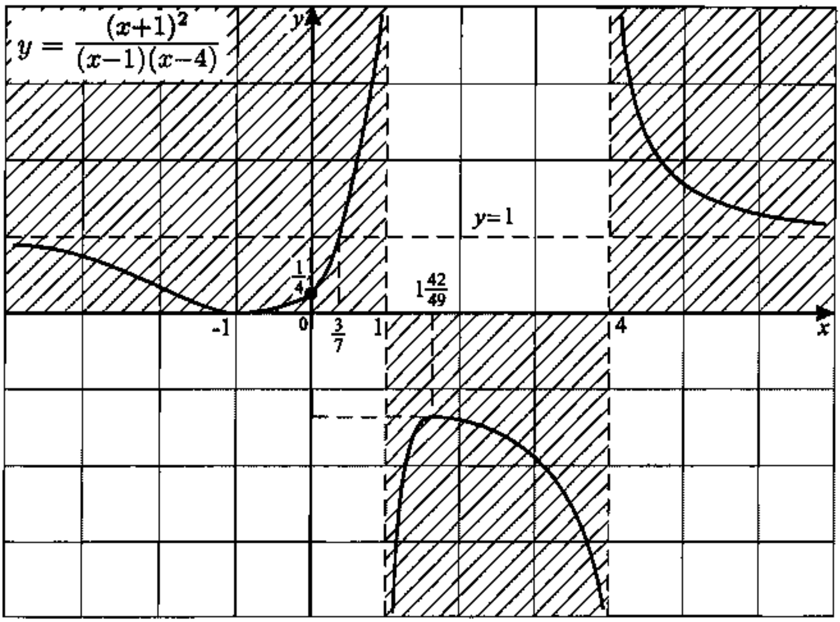
При $D = 0$ $x_0 - -\frac{b}{2a}$; $x_0 = \frac{5y+2}{2(y-1)}$.

$$x_1 = \frac{5y_1+2}{2(y_1-1)};\ y_1 = -\frac{40}{9};$$

$$x_1 = \frac{-\frac{200}{9}+2}{2\left(-\frac{40}{9}-1\right)} = \frac{182}{98} = \frac{91}{49} = 1\frac{42}{49}.$$

$$x_2 = \frac{5y_2+2}{2(y_2-1)};\ y_2 = 0;\ x_2 = -1.$$

Эскиз графика:



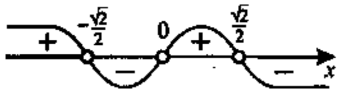
Отметим, что можно точно указать интервалы монотонности:

а) $y = y(x)$ возрастает на $[-1; 1)$ и на $\left(1; 1\frac{42}{49}\right]$;

б) $y = y(x)$ убывает на $(-\infty; -1]$, на $\left[1\frac{42}{49}; 4\right)$ и на $(4; \infty)$.

9. $y = \frac{1}{2x(1-2x^2)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \\ x \neq 0. \end{cases}$

2) 

3) $$\left(x \to \frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$\left(x \to \frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to 0 + 0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to 0 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$\left(x \to -\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$\left(x \to -\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0).$$

4) Контрольные точки:

$x = -1$; $y = \frac{1}{2}$;

$x = \frac{1}{2}$; $y = 2$;

$x = -\frac{1}{2}$; $y = -2$;

$x = 1$; $y = -\frac{1}{2}$.

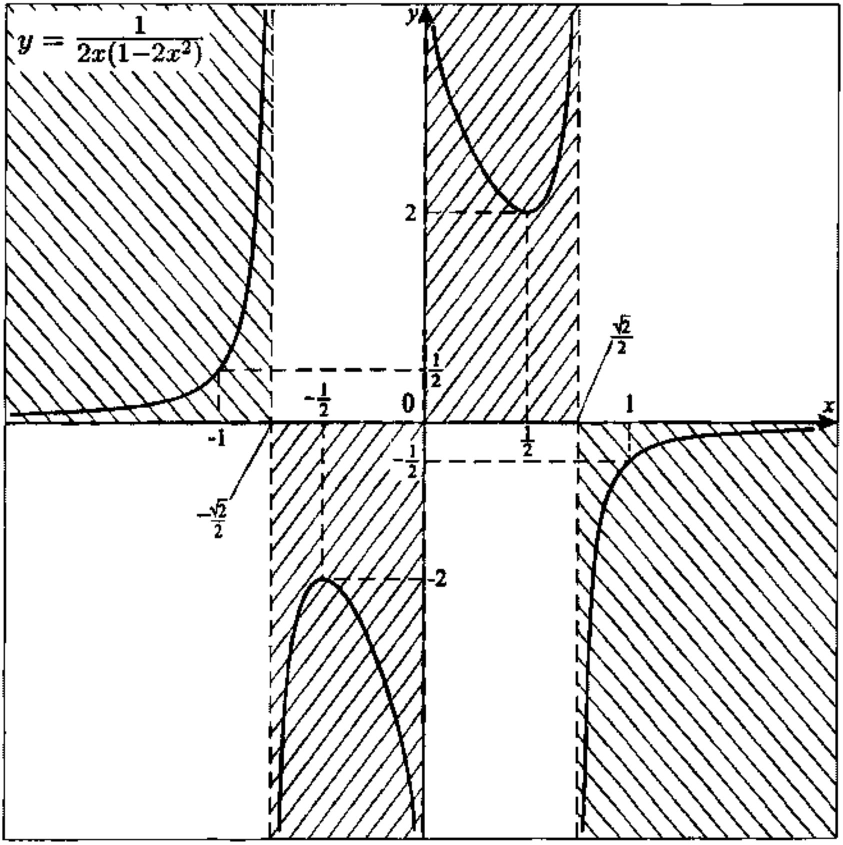
Очевидно, что минимаксные значения приближенные.

Можно отметить, что так как $y = y(x)$ — нечетная, т.е.

а) $D(y)$ — симметричное множество;

б) $y(-x) = -y(x)$,

то график $y = y(x)$ центрально-симметричен относительно начала координат — точки $(0; 0)$.


$y = \frac{1}{2x(1-2x^2)}$
y
x
2
$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$
0
1
-1
$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
-2

10. $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
$x^2 - x + 1 > 0$ при всех x,
$x^2 + x + 1 > 0$ при всех x
так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

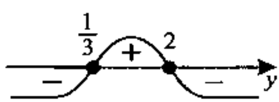
2) $y > 0$ при всех x.

3) $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$,
так как $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$.
Выясним, пересекает ли горизонтальная асимптота график $y = y(x)$:
$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} = 1$;
$x^2 - x + 1 = x^2 + x + 1$;
$x = 0$ — пересекает.

4) Найдем $E(y)$.
$y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$;
$yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$;
$(y-1)x^2 + (y+1)x + y - 1 = 0$ (при $y = 1$ $x = 0$),
$y \neq 1$,

$$x_{1,2} = \frac{-(y+1) \pm \sqrt{(y+1)^2 - 4(y-1)^2}}{2(y-1)} =$$
$$= \frac{-(y+1) \pm \sqrt{(y+1+2y-2)(y+1-2y+2)}}{2(y-1)} =$$
$$= \frac{-(y+1) \pm \sqrt{(3y-1)(3-y)}}{2(y-1)}.$$

$D = (3y-1)(3-y) \geqslant 0$.



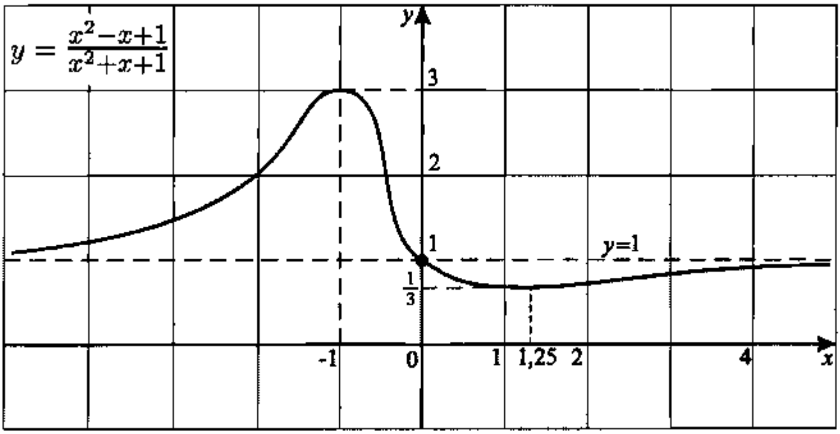
$E(y) = \left[\frac{1}{3}; 3\right]$ (так как $y = 1$ при $x = 0$).

При $D=0 \quad x_0=-\frac{b}{2a}$;

$x_0=-\frac{y+1}{2(y-1)}$;

$y_1=\frac{1}{3};\ x_1=-\frac{\frac{1}{3}+1}{2\left(\frac{1}{3}-1\right)}=-\frac{\frac{5}{3}}{-\frac{4}{3}}=1{,}25$;

$y_2=3;\ x_2=-\frac{3+1}{2(3-1)}=-\frac{4}{4}=-1$.



В данном случае мы можем точно указать интервалы монотонности:

на $(-\infty;-1]$ $\ y=y(x)$ возрастает;

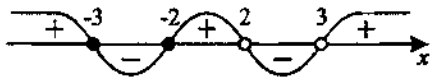
на $[-1;1{,}25]$ $\ y=y(x)$ убывает;

на $[1{,}25;\infty)$ $\ y=y(x)$ возрастает.

11. $y = \frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq 3. \end{cases}$

2) $y = \frac{(x+2)(x+3)}{(x-2)(x-3)}$.



3) $(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 3+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$.

$$\left(\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6} = \frac{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}\right).$$

$\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6} = 1$;

$x = 0$ (абсцисса точки пересечения графика $y = y(x)$ с горизонтальной асимптотой $y = 1$).

4) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6} = y$;

$x^2 + 5x + 6 = yx^2 - 5xy + 6y$;

$(y-1)x^2 - 5(y+1)x + 6(y-1) = 0$; $y \neq 1$;

$D = [5(y+1)]^2 - 24(y-1)^2 = y^2 + 98y + 1 \geqslant 0$;

$y_{1,2} = -49 \pm \sqrt{49^2 - 1} = -49 \pm 20\sqrt{6}$.

Но при $y - 1$ $x = 0$.

$E(y) = (-\infty; -49 - 20\sqrt{6}] \cup [-49 + 20\sqrt{6}; +\infty)$.

Для $(y-1)x^2 - 5(y+1)x + 6y - 6 = 0$

$x_0 = \frac{5(y+1)}{2(y-1)}$ (при $D = 0$).

а) пусть $y_1 = -49 - 20\sqrt{6}$.

$$x_1 = \frac{5}{2} \cdot \frac{(-49-20\sqrt{6}+1)}{(-49-20\sqrt{6}-1)} = \frac{5(-48-20\sqrt{6})}{2(-50-20\sqrt{6})} =$$

$$= \frac{5 \cdot 4(12+5\sqrt{6})}{2 \cdot 10(5+2\sqrt{6})} = \frac{(12+5\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})} =$$

$$= \frac{60-60+\sqrt{6}}{25-24} = \sqrt{6};$$

б) пусть $y_2 = -49 + 20\sqrt{6}$.

$$x_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{(-49+20\sqrt{6}+1)}{(-49+20\sqrt{6}-1)} = \frac{5(-48+20\sqrt{6})}{2(-50+20\sqrt{6})} =$$

$$= \frac{-12+5\sqrt{6}}{-5+2\sqrt{6}} = \frac{(-12+5\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})}{(-5+2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})} =$$

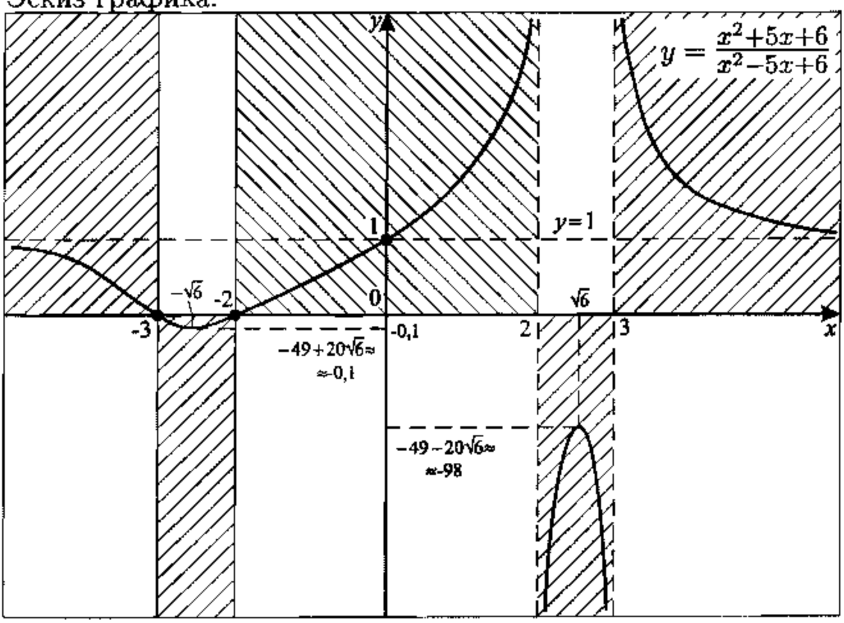
$$= \frac{-60+60+\sqrt{6}}{24-25} = -\sqrt{6}.$$

5) Из эскиза видно, что:

а) $y = y(x)$ возрастает на $[-\sqrt{6}; 2)$ и на $(2; \sqrt{6}]$;

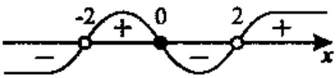
б) $y = y(x)$ убывает на $(-\infty; -\sqrt{6}]$, на $[\sqrt{6}; 3)$ и на $(3; \infty)$.

Эскиз графика:



12. $y = \frac{x^3+2x}{x^2-4}$.

1) $D(y)$: $x \neq \pm 2$.

2) 

3) $$(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to -\infty).$$

Так как степень числителя выше степени знаменателя, выделим целую часть.

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+2x & x^2-4 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-4x} & x \\ 6x & \end{array}$$

Таким образом, $\frac{x^3+2x}{x^2-4} = x + \frac{6x}{x^2-4}$.

Итак, $y = x$ — наклонная асимптота.

4) Контрольные точки:

$x = -3$; $y = \frac{-27-6}{9-4} = -\frac{33}{5} = -6{,}6$;

$x = 3$; $y = \frac{27+6}{9-4} = \frac{33}{5} = 6{,}6$.

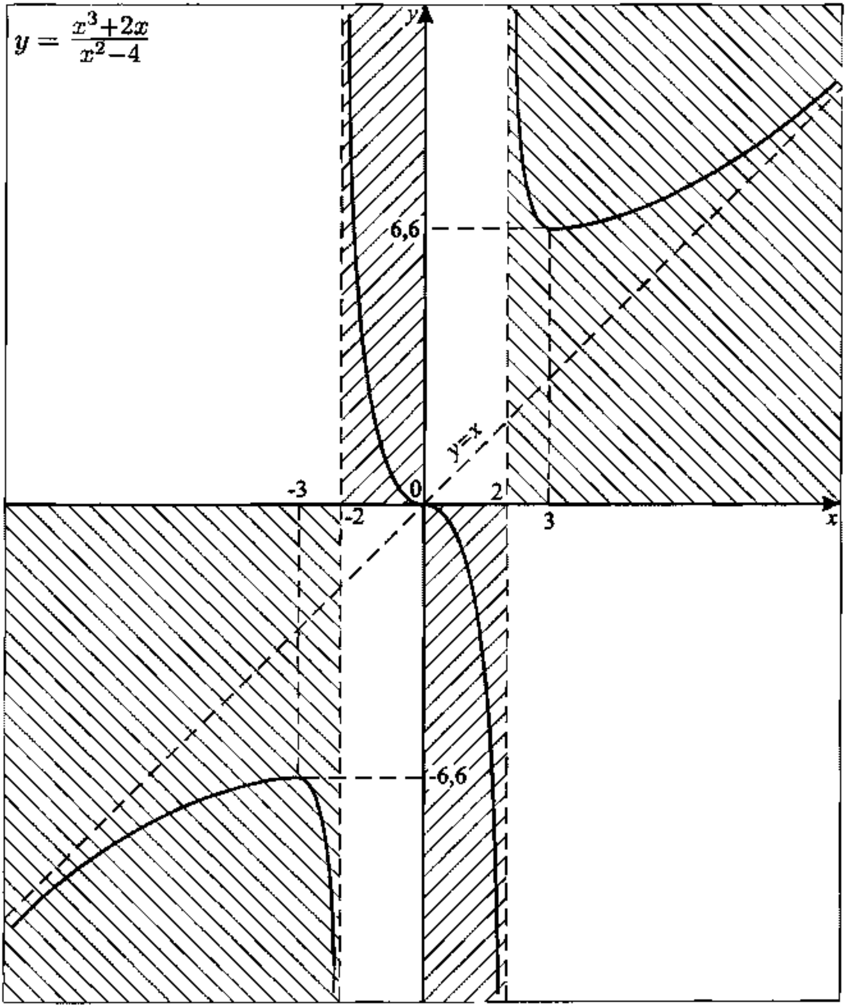
Разумеется, минимаксные значения вычислены весьма приближенно, но эскиз графика ясен.

5) $y(x)$ — нечетная, так как

а) $D(y)$ — симметричное множество относительно нуля;

б) $y(-x) = -y(x)$,

значит, график $y = \frac{x^3+2x}{x^2-4}$ центрально-симметричен относительно начала координат.


$y = \frac{x^3+2x}{x^2-4}$
y
x
0
-3
-2
2
3
6,6
-6,6
y=x

13. $y = \frac{x^3-1}{x}$.

1) $D(y)$ $x \neq 0$.

2) $y = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}$ $(x^2+x+1>0$ для всех $x)$;

3) $(x \to 0+0) \Rightarrow (-\frac{1}{x} \to -\infty)$;

$(x \to 0-0) \Rightarrow (-\frac{1}{x} \to +\infty)$;

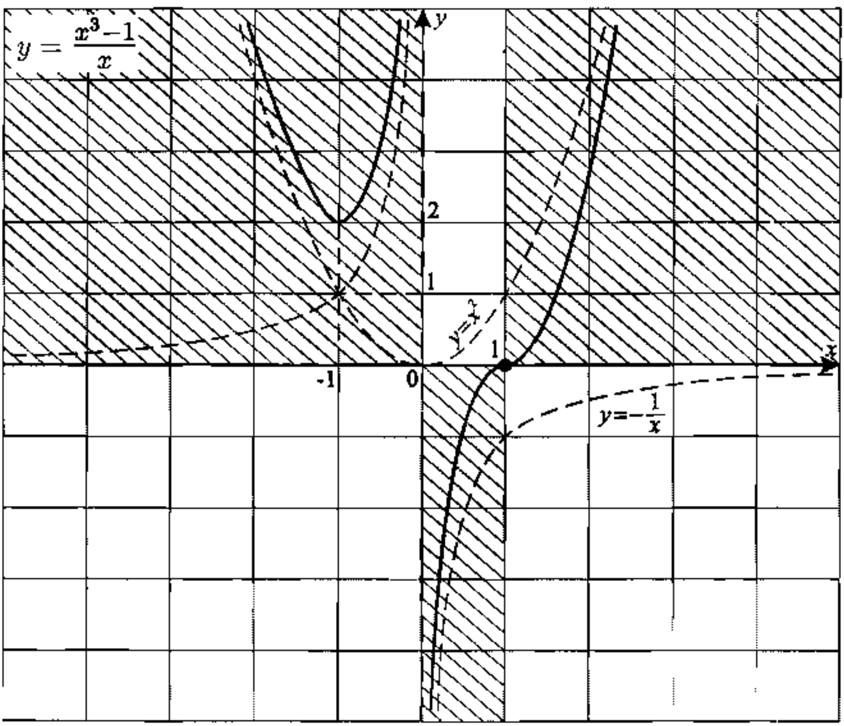
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to x^2)$.

Асимптотические кривые $y = -\frac{1}{x}$ и $y = x^2$.

4) Контрольные точки: $x = 1$; $y = 0$;

$x = -1$; $y = 2$; $x = -2$; $y = 4{,}5$;

$x = 2$; $y = 3{,}5$; $x = -\frac{1}{2}$; $y = 2{,}25$.



14. $y = \frac{-4x^3+8x}{x^3-1}$.

1) $D(y)$: $x \neq 1$.

2) $y = \frac{-4x(x^2-2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

$x^2 + x + 1 > 0$ для всех x, так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

3) $(x \to 1 + 0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 1 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to -4)$,

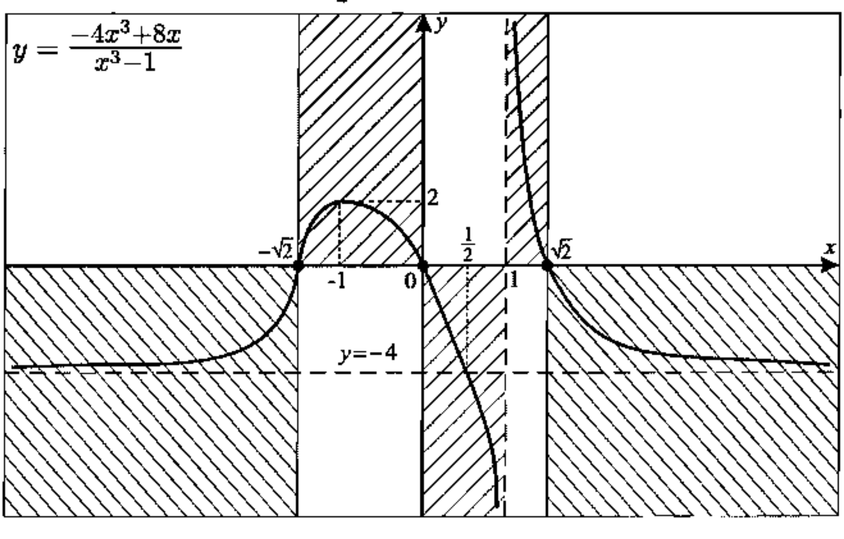
так как $\frac{-4x^3+8x}{x^3-1} = \frac{-4+\frac{8}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}}$.

Выясним наличие точек пересечения графика $y=y(x)$ и $y = -4$.

$\frac{-4x^3+8x}{x^3-1} = -4$; $-4x^3 + 8x = -4x^3 + 4$; $x = \frac{1}{2}$.

4) Контрольные точки:

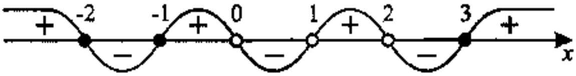
$x = -1$; $y = \frac{-4}{-2} = 2$. Эскиз готов.



15. $y = \dfrac{(x-3)(x^2+3x+2)}{x(x^2-3x+2)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$

2) $y = \dfrac{(x-3)(x+1)(x+2)}{x(x-1)(x-2)}$.



3) $(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;

$$\frac{(x-3)(x^2+3x+2)}{x(x^2-3x+2)} = \frac{x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$.

Выясним, при каких x горизонтальная асимптота $y = 1$ пересекает график функции.

$\dfrac{(x-3)(x^2+3x+2)}{x(x^2-3x+2)} = 1$;

$x^3 - 7x - 6 = x^3 - 3x^2 + 2x$;

$3x^2 - 9x - 6 = 0$; $x^2 - 3x - 2 = 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

4) Контрольные точки:

$x = 4$; $\quad y = \dfrac{(4-3)(4+1)(4+2)}{4(4-1)(4-2)} = \dfrac{30}{24} = \dfrac{5}{4}$;

$x = -1{,}5$; $\quad y = \dfrac{(-1{,}5-3)(-1{,}5+1)(-1{,}5+2)}{-1{,}5(-1{,}5-1)(-1{,}5-2)} =$

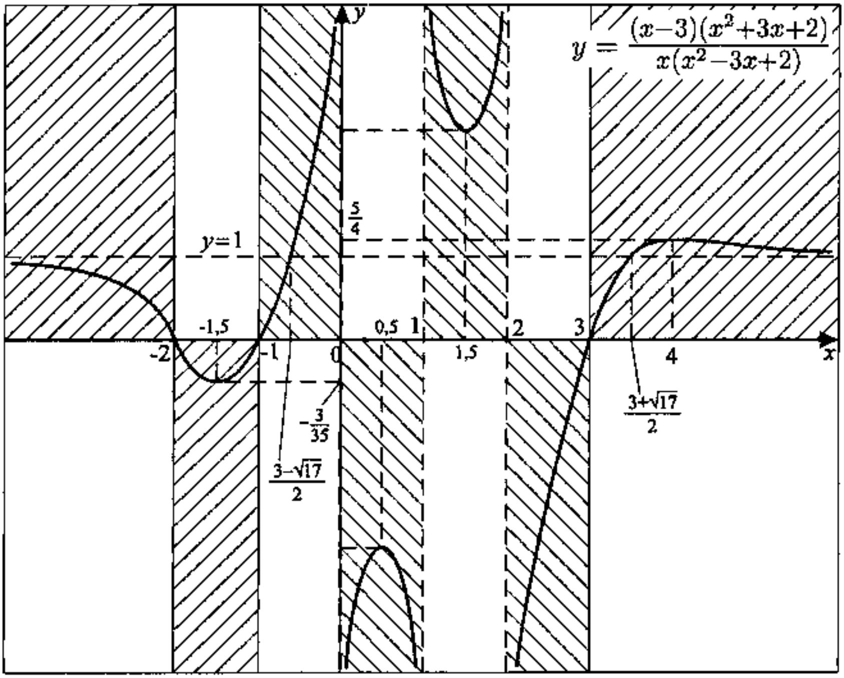
$$= \frac{-4{,}5(-0{,}5)0{,}5}{-1{,}5(-2{,}5)(-3{,}5)} = -\frac{45 \cdot 5 \cdot 5}{15 \cdot 25 \cdot 35} = -\frac{3}{35};$$

$x = 0{,}5;\ \ y = -25;$

$x = 1{,}5;\ \ y = 35.$

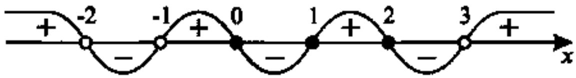
Минимаксные значения весьма приближенные, но характер (эскиз) графика достаточно ясен.

Эскиз графика:



16. $y = \frac{x(x^2-3x+2)}{(x-3)(x^2+3x+2)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2. \end{cases}$

2) 

3) $$(x \to 3+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to 3-0) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$(x \to -1+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to -1-0) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$\frac{x(x^2-3x+2)}{(x-3)(x^2+3x+2)} = \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)},$$
$$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1).$$

4) Выясним, пересекаются ли горизонтальная асимптота и график $y = y(x)$.
$$\frac{x(x^2-3x+2)}{(x-3)(x^2+3x+2)} = 1;$$
$$x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 - 7x - 6;$$
$$x^2 - 3x - 2 = 0;$$
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$
Отметим, что рассматривая контрольные значения, имеем приближенные минимаксные значения.

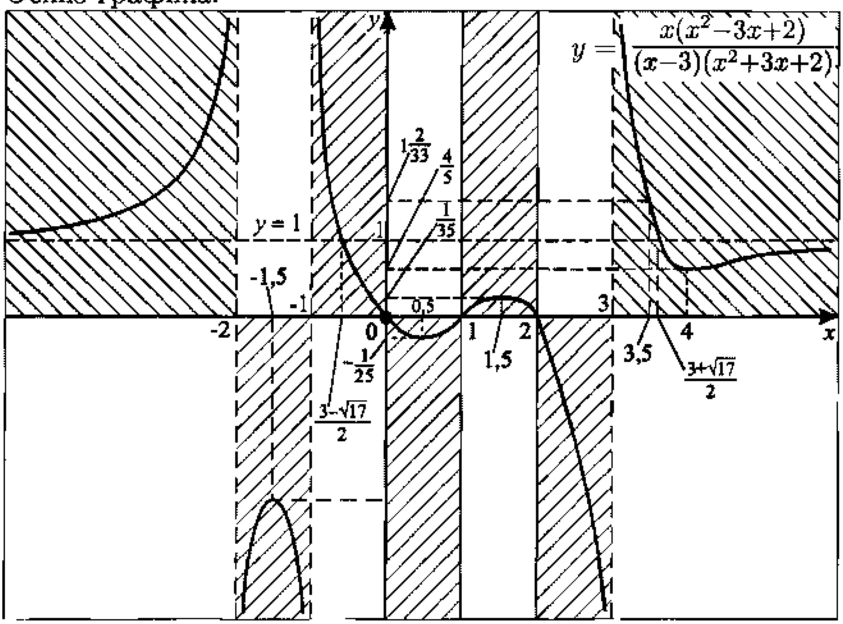
5) $$x = -1{,}5;\ y = \frac{-1{,}5(-1{,}5-1)(-1{,}5-2)}{(-1{,}5-3)(-1{,}5+1)(-1{,}5+2)} = -\frac{15\cdot25\cdot35}{45\cdot5\cdot5} = -\frac{35}{3} = -11\frac{2}{3};$$
$$x = \frac{1}{2};\ y = \frac{0{,}5(0{,}5-1)(0{,}5-2)}{(0{,}5-3)(0{,}5+1)(0{,}5+2)} = -\frac{5\cdot5\cdot15}{25\cdot15\cdot25} = -\frac{1}{25};$$
$$x = 1{,}5;\ y = \frac{1{,}5(1{,}5-1)(1{,}5-2)}{(1{,}5-3)(1{,}5+1)(1{,}5+2)} = \frac{15\cdot5\cdot5}{15\cdot25\cdot35} = \frac{1}{35};$$

$$x = 3{,}5 < \frac{3+\sqrt{17}}{2};$$

$$y = \frac{3{,}5(3{,}5-1)(3{,}5-2)}{(3{,}5-3)(3{,}5+1)(3{,}5+2)} = \frac{35\cdot 25\cdot 15}{5\cdot 45\cdot 55} = \frac{35}{33};$$

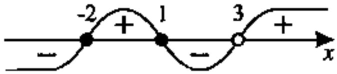
$$x = 4,\ y = \frac{4(4-1)(4-2)}{(4-3)(4+1)(4+2)} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}.$$

Эскиз графика:



17. $y = \frac{x^2+x-2}{x-3}$.

1) $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

2) 

3) $(x \to 3+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

Так как степень числителя выше степени знаменателя, выделим целую часть.

$$\begin{array}{r|l} -\;x^2 + \;\; x - \;\; 2 & x-3 \\ \underline{x^2 - 3x \qquad} & \overline{x+4} \\ -\;4x - \;\; 2 & \\ \underline{4x - 12} & \\ 10 & \end{array}$$

так как $y = x+4+\frac{10}{x-3}$, значит $y = x+4$ — наклонная асимптота.

$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to x+4)$.

Выясним, пересекает ли наклонная асимптота график $y = y(x)$.

$y = x+4$, т.е. $x+4+\frac{10}{x-3} = x+4$.

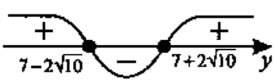
Очевидно, $\frac{10}{x-3} = 0$; корней нет,
значит, не пересекает.

4) $E(y)$

$y = \frac{x^2+x-2}{x-3}$;

$yx - 3y = x^2 + x - 2$;

$x^2 + (1-y)x + 3y - 2 = 0$;



$$x_{1,2} = \frac{y-1 \pm \sqrt{(y-1)^2 - 4(3y-2)}}{2} = \frac{y-1 \pm \sqrt{y^2-14y+9}}{2}.$$

$D(y) \geqslant 0$, т.е. $y^2 - 14y + 9 \geqslant 0$ $\left[\begin{array}{l} y \geqslant 7+2\sqrt{10}, \\ y \leqslant 7-2\sqrt{10}. \end{array}\right.$

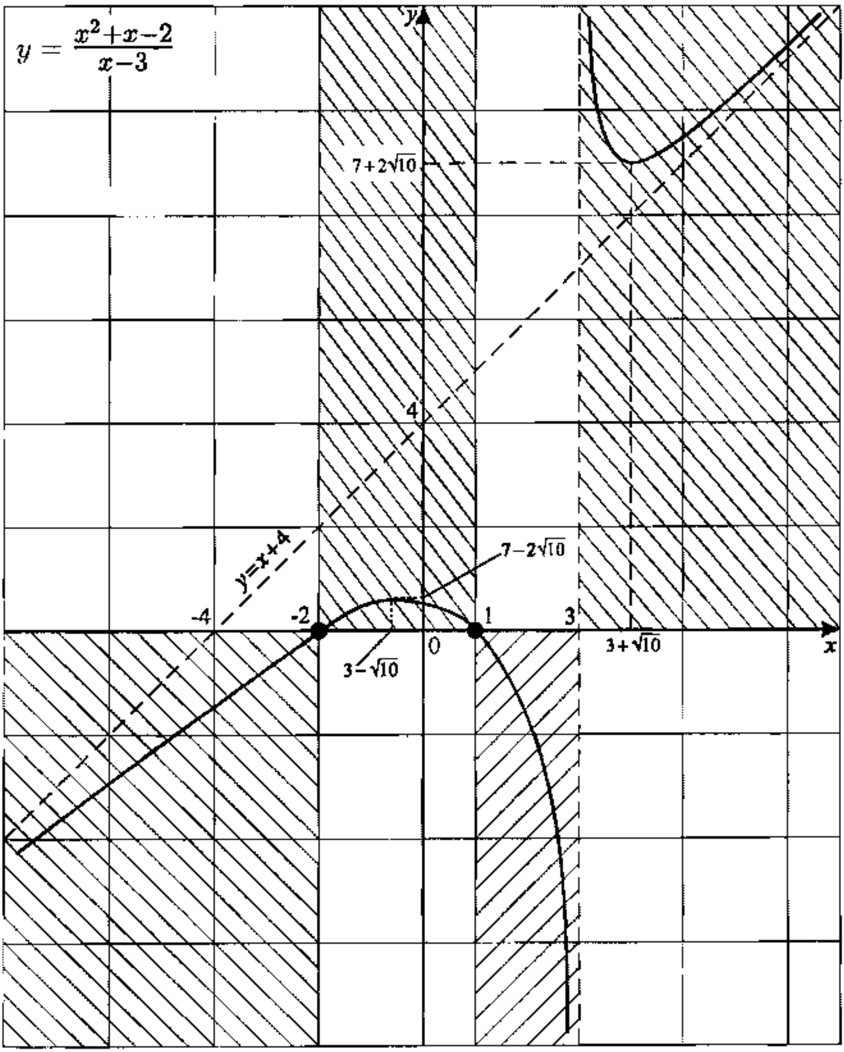
При $D = 0$ для $x^2 + (1-y)x + 3y - 2 = 0$;

$x_0 = -\frac{b}{2a}$, т. е. $x_0 = \frac{y-1}{2}$.

$x_1 = \frac{y_1 - 1}{2}$; $x_1 = 3 + \sqrt{10}$;

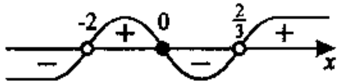
$y_2 = 7 - 2\sqrt{10}$; $x_2 = 3 - \sqrt{10}$.

Эскиз графика:



18. $y = \frac{3x^3}{3x^2+4x-4}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq \frac{2}{3}. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to \frac{2}{3} + 0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;

$(x \to \frac{2}{3} - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

$(x \to -2 + 0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;

$(x \to -2 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

Так как степень числителя больше степени знаменателя, то существует наклонная асимптота. Для ее нахождения выделим целую часть.

$$\begin{array}{r|l} -\,3x^3 & 3x^2+4x-4 \\ \cline{2-2} \underline{3x^3+4x^2-\;\;4x} & x-\frac{4}{3} \\ -\,-4x^2+\;\;4x & \\ \underline{-4x^2-\frac{16}{3}x+\frac{16}{3}} & \\ \frac{28}{3}x-\frac{16}{3} & \end{array}$$

$\frac{3x^3}{3x^2+4x-4} = x - \frac{4}{3} + \frac{28x-16}{3(3x^2+4x-4)}$.

Выясним, пересекает ли наклонная асимптота график функции $y = y(x)$.

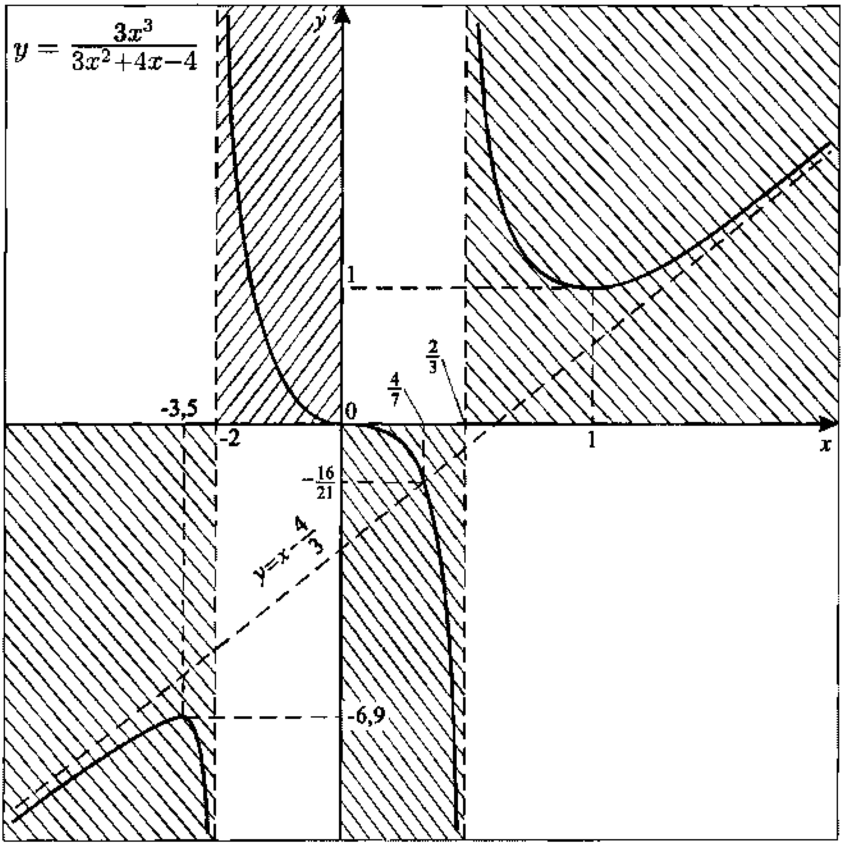
Очевидно, что это возможно, если $28x - 16 = 0$, т. е. $x = \frac{4}{7}$.

4) Контрольные точки:

$x = 1$; $y = 1$;

$x = -3{,}5$; $y \approx -6{,}9$.

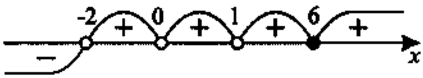
Эскиз графика



19. $y = \frac{(x-6)^2}{x^5-3x^3+2x^2}$.

1) $y = \frac{(x-6)^2}{x^2(x-1)^2(x+2)}$.

$D(y)$: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq -2. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

Так как степень числителя меньше степени знаменателя, то существует горизонтальная асимптота, причем ею является ось Ox, т. е. $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$;

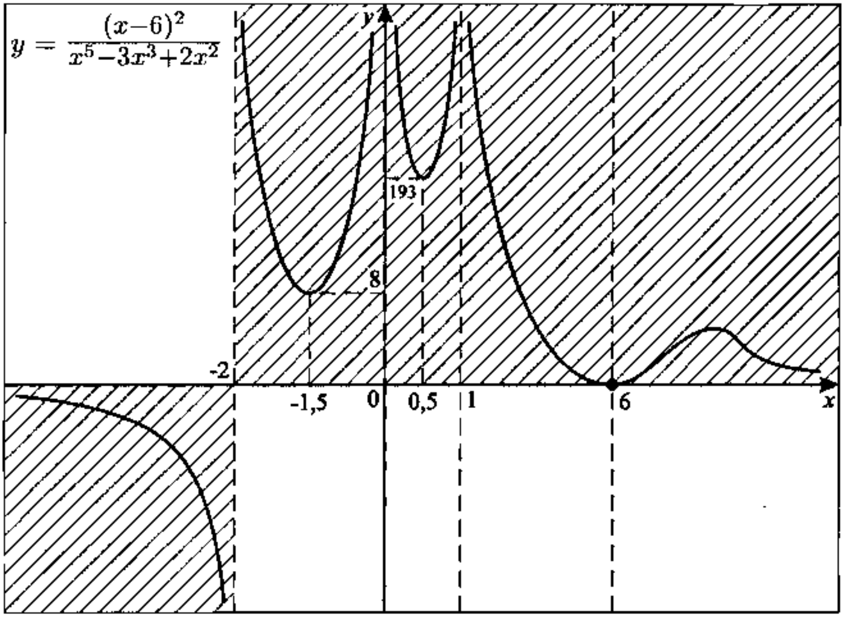
4) Контрольные точки:

$x = -1{,}5$; $y = 8$;

$x = 0{,}5$; $y \approx 193$.

Определить, при каких x существует наибольшее значение функции на $(6; +\infty)$ приближенно или при исследовании с помощью производных технически очень сложно, но характер поведения графика функции понятен. Эскиз готов.

Эскиз графика:



На осях дан разный масштаб

Примечание. $\varphi(x) = x^3 - 3x + 2$.

Так как $\varphi(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, то

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3 \qquad -3x+2 & x-1 \\ \underline{x^3 - x^2} \qquad\qquad & \overline{x^2 + x - 2} \\ -\;x^2 - 3x + 2 & \\ \underline{x^2 - \;\; x} \quad\; & \\ -\;\; -2x + 2 & \\ \underline{-2x + 2} & \end{array}$$

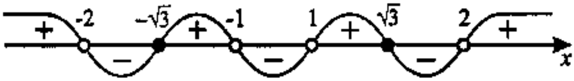
Но $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$.

Тогда $\varphi(x) = (x-1)(x+2)(x-1) = (x-1)^2(x+2)$, что и было использовано в пункте 1.

20. $y = \frac{x^4-2x^2-3}{x^4-5x^2+4}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x^2 \neq 1; \\ x^2 \neq 4. \end{cases}$

2) $y = \frac{(x^2-3)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$.



3) $$\begin{aligned} (x \to 2+0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\ (x \to 2-0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\ (x \to 1+0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\ (x \to 1-0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\ (x \to -1+0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\ (x \to -1-0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\ (x \to -2+0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\ (x \to -2-0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \end{aligned}$$

$\frac{x^4-2x^2-3}{x^4-5x^2+4} = \frac{1-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}}{1-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^4}}$,

т. е. из $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$;

$y = 1$ — горизонтальная асимптота.

$\frac{x^4-2x^2-3}{x^4-5x^2+4} = 1$; $x^4 - 2x^2 - 3 = x^4 - 5x^2 + 4$;

$3x^2 = 7$; $x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}$; $x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Значит, горизонтальная асимптота пересекает график функции в двух точках с абсциссами x_1 и x_2.

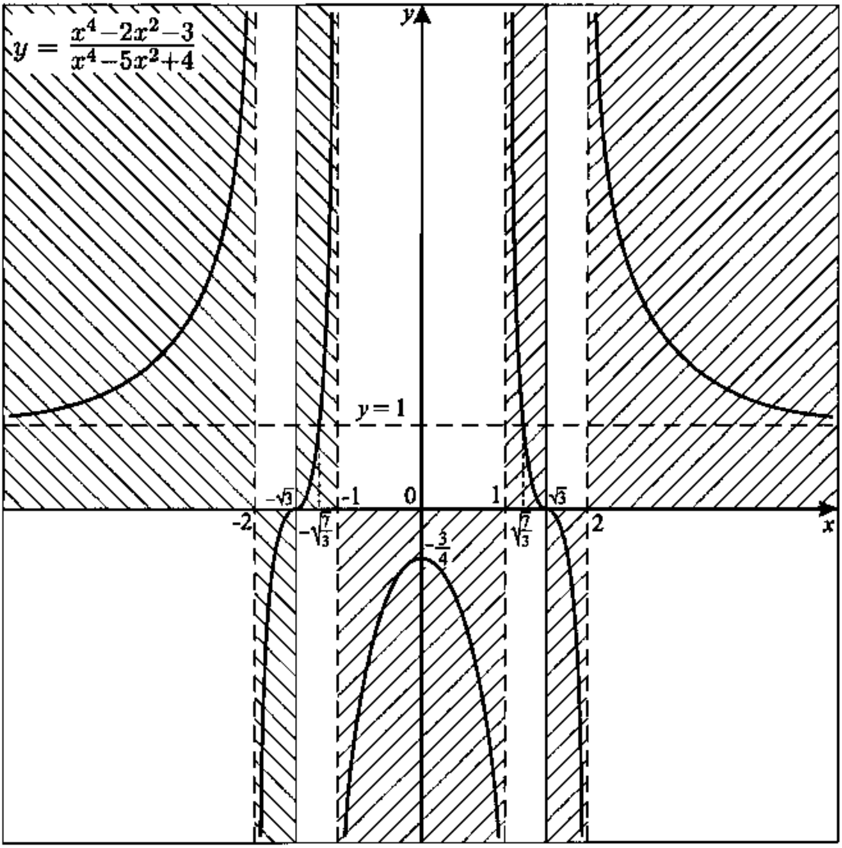
4) $y(-x) = \frac{(-x)^4-2(-x)^2-3}{(-x)^4-5(-x)^2+4} = \frac{x^4-2x^2-3}{x^4-5x^2+4} = y(x)$,

т. е. $y = y(x)$ — четная, значит график ее симметричен относительно оси Oy.

5) Контрольные точки:

$x = 0$; $y = -\frac{3}{4}$ (оказывается точкой максимума).

Эскиз готов.

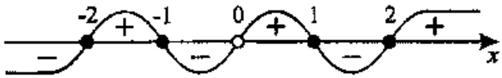


Примечание. Из эскиза графика очевидно, что
в правой полуплоскости на интервалах непрерывности $[0;1)$, $(1;2)$ и $(2;\infty)$ функция убывает,
а в левой на интервалах непрерывности $(-\infty;-2)$, $(-2;-1)$ и $(-1;0]$ — возрастает.

21. $y = \frac{x^4-5x^2+4}{x^3+9x}$.

1) $D(y)$: $x \neq 0$.

2) $y = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{x(x^2+9)}$.



3) $(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;

$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^4 - \ 5x^2 + 4 \\ x^4 + \ 9x^2 \qquad \end{array} & \begin{array}{l} x^3 + 9x \\ \hline x \end{array} \\ \hline -14x^2 + 4 & \end{array}$$

Итак, $y = x + \frac{4-14x^2}{x^3+9x^2}$;

$y = x$ — наклонная асимптота.

При $4 - 14x^2 = 0$, т.е.

$x_1 = \sqrt{\frac{2}{7}}$; $y_1 = \sqrt{\frac{2}{7}}$;

$x_2 = -\sqrt{\frac{2}{7}}$; $y_2 = -\sqrt{\frac{2}{7}}$

график $y = y(x)$ пересекает наклонную асимптоту.

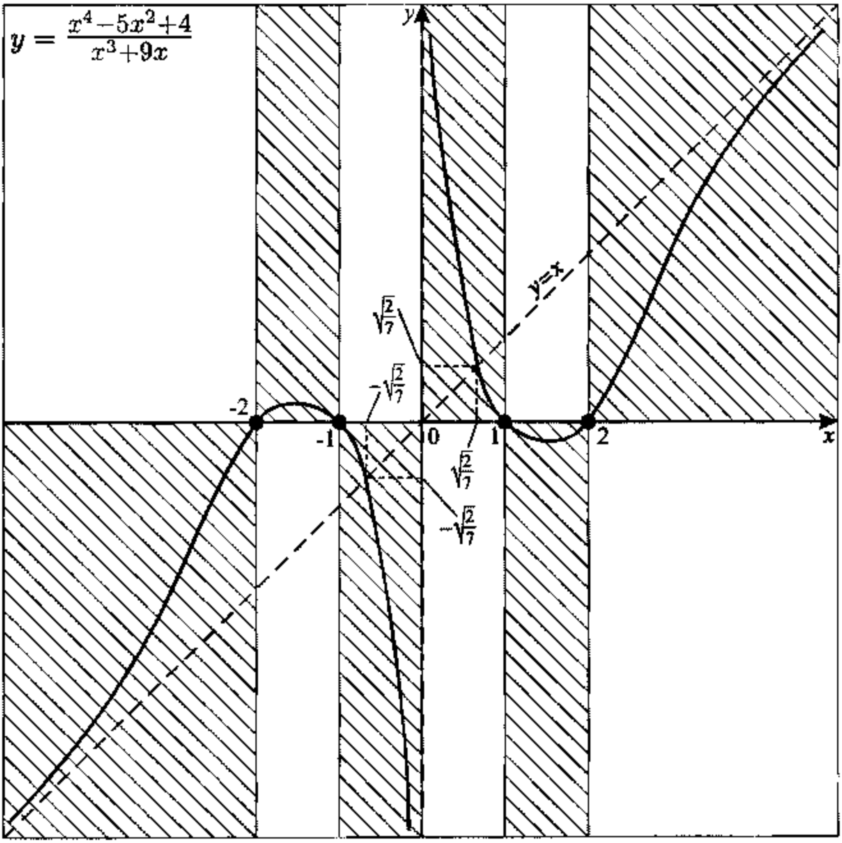
4) а) $D(y)$ — симметричное множество;

б) $y(-x) = \frac{(-x)^4-5(-x)^2+4}{(-x)^3+9(-x)} = -\frac{x^4-5x^2+4}{x^3-9x} = -y(x)$.

Значит $y = y(x)$ — нечетная функция, т.е. график $y = y(x)$ центрально-симметричен относительно начала координат.

Эскиз графика построен.

Эскиз графика:



22. $y = \frac{x^3-9x}{x^2+x+2}$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$, т. к. $x^2 + x + 2 \neq 0$.

2) 

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 \qquad - 9x & x^2 + x + 2 \\
\underline{x^3 + x^2 + \ 2x} & \overline{x - 1} \\
-x^2 - 11x & \\
\underline{-x^2 - \quad x - 2} & \\
-10x + 2 &
\end{array}
$$

Итак, $y = x - 1 + \frac{2-10x}{x^2+x+2}$;

$y = x - 1$ — наклонная асимптота.

При $2 - 10x = 0$, т. е. $x = 0{,}2$, график $y = y(x)$ пересекает наклонную асимптоту.

3) $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to x - 1)$;

4) Контрольные точки:

$x = 0{,}2$;

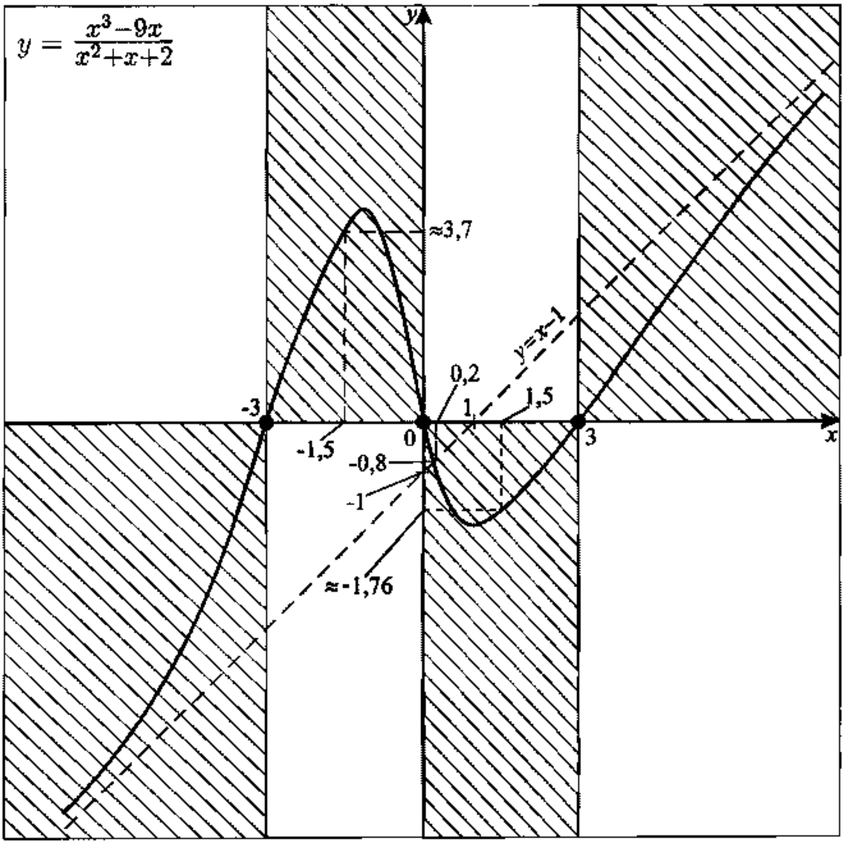
$$y = \frac{0{,}2(0{,}2-3)(0{,}2+3)}{0{,}04+0{,}2+2} = -\frac{0{,}2 \cdot 2{,}8 \cdot 3{,}2}{2{,}24} = -0{,}8;$$

$x = 1{,}5$;

$$y = \frac{1{,}5(1{,}5-3)(1{,}5+3)}{(1{,}5)^2+1{,}5+2} = -\frac{1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 4{,}5}{5{,}75} \approx -1{,}76;$$

$x = -1{,}5$;

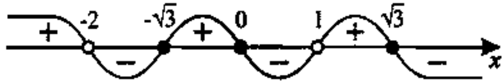
$$y = \frac{-1{,}5(-1{,}5-3)(-1{,}5+3)}{(-1{,}5)^2-1{,}5+2} = \frac{1{,}5 \cdot 4{,}5 \cdot 1{,}5}{2{,}75} \approx 3{,}68.$$


$y = \frac{x^3-9x}{x^2+x+2}$
y
x
≈3,7
y=x-1
0,2
1
1,5
-3
0
3
-1,5
-0,8
-1
≈-1,76

23. $y = \frac{-4x^3+12x}{x^2+x-2}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq 1. \end{cases}$

2) $y = \frac{-4x(x^2-3)}{(x+2)(x-1)}$.



3) $(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$.

$$\begin{array}{r|l} -4x^3 \qquad\qquad + 12x & x^2+x-2 \\ \cline{2-2} -\;\; -4x^3 - 4x^2 + \;\; 8x & -4x+4 \\ \cline{1-1} 4x^2 + \;\; 4x \quad\; & \\ -\;\; 4x^2 + \;\; 4x - 8 & \\ \cline{1-1} 8 & \end{array}$$

Таким образом, $\frac{-4x^3+12x}{x^2+x-2} = -4x + 4 + \frac{8}{x^2+x-2}$.

Итак, $y = -4x + 4$ — наклонная асимптота.

Так как $8 \neq 0$, то пересечений с графиком $y = y(x)$ нет.

4) Контрольные точки:

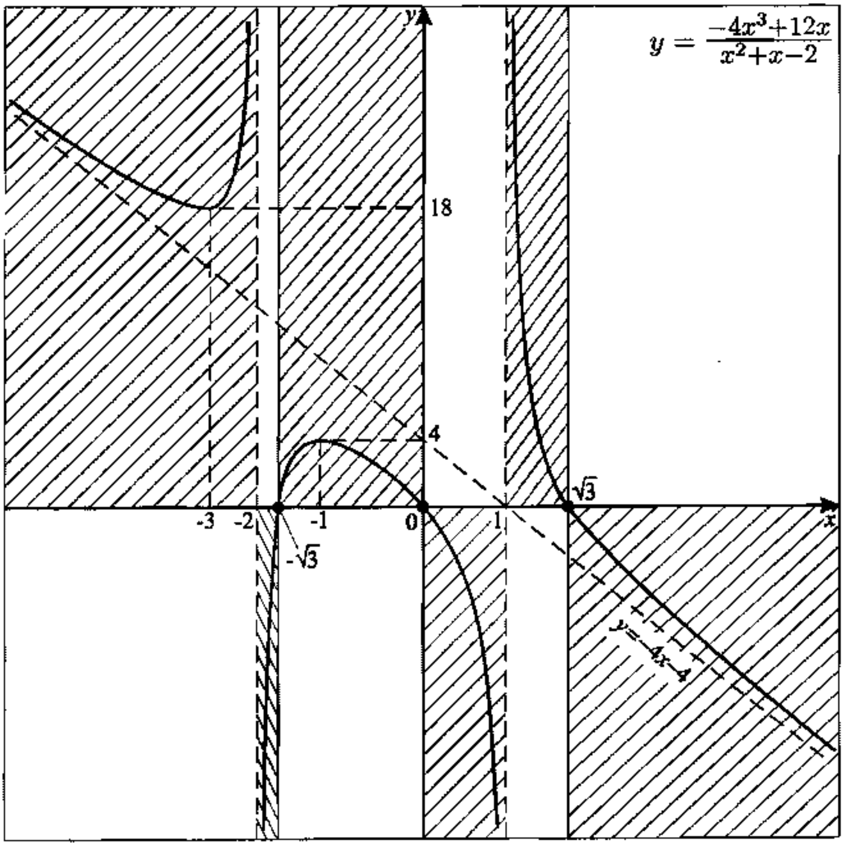
$x = -1$;

$y = \frac{-4(-1)-12}{1-1-2} = \frac{-8}{-2} = 4$;

$x = -3$;

$y = \frac{108-36}{9-3-2} = \frac{72}{4} = 18$.

Эскиз графика:

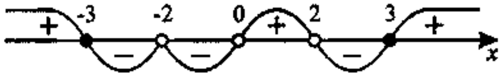


На осях дан разный масштаб.

24. $y = \frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^3-4x}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$

2) $y = \frac{(x-3)(x+3)(x+2)}{x(x+2)(x-2)} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-2)}$.



3) Очевидно, что хотя $-2 \notin D(y)$, $x = -2$ не является вертикальной асимптотой:

$(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$,

так как $\frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^3-4x} = \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{9}{x^2}-\frac{18}{x^3}}{1-\frac{4}{x^2}}$.

4) Выясним наличие пересечения горизонтальной асимптоты с графиком $y = y(x)$.

$\frac{x^2-9}{x(x-2)} = 1$; $x^2 - 9 = x^2 - 2x$; $x = 4{,}5$.

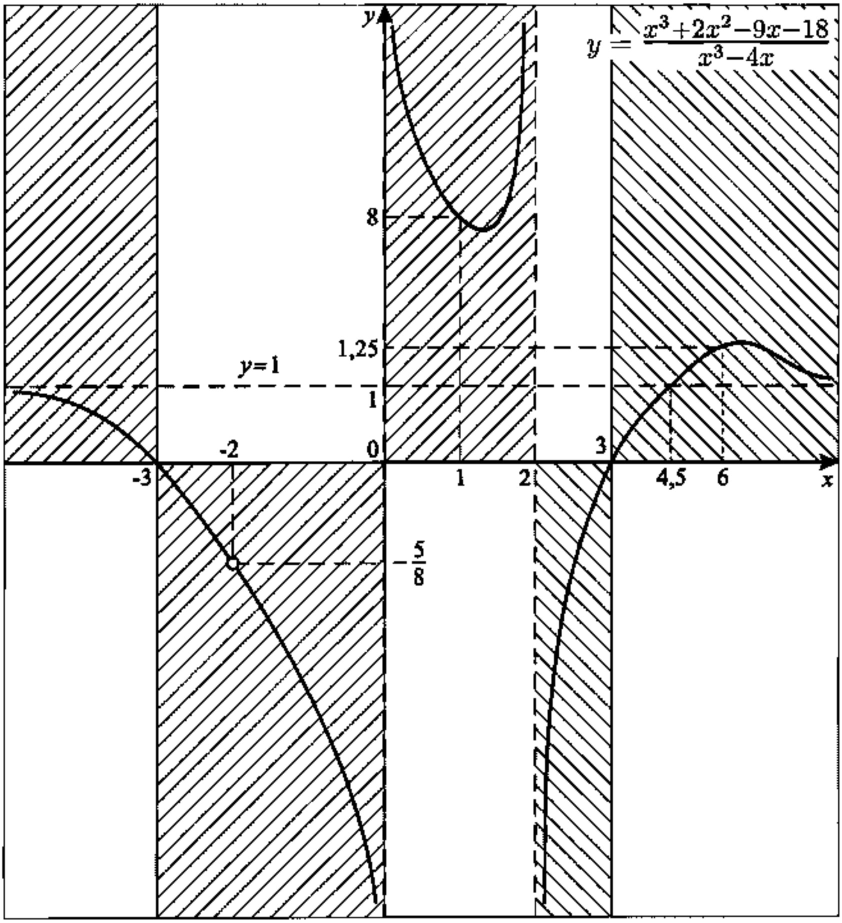
5) Контрольные точки будем вычислять в уже преобразованной в результате сокращения функции $y = \frac{x^2-9}{x(x-2)}$:

$x = -2$; $y = \frac{-5}{-2(-2-2)} = -\frac{5}{8}$ — эту точку необходимо из графика $y = y(x)$ исключить;

$x = 1$; $y = \frac{1-9}{1(1-2)} = 8$;

$x = 6$; $y = \frac{36-9}{6(6-2)} = \frac{27}{24} = 1{,}125$.

Эскиз графика:



На осях дан разный масштаб.

Примечание. Так как $\varphi(x)=x^3+2x^2-9x-18$, $\varphi(-2)=0$, то

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+2x^2-9x-18 & x+2 \\ \underline{x^3+2x^2} & \overline{x^2-9} \\ -\,-9x-18 & \\ \underline{-9x-18} & \end{array}$$

Тогда $\varphi(x)=(x+2)(x+3)(x-3)$.

25. $y = \frac{1}{x^2(x^2-3x+2)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.

4) Контрольные точки:

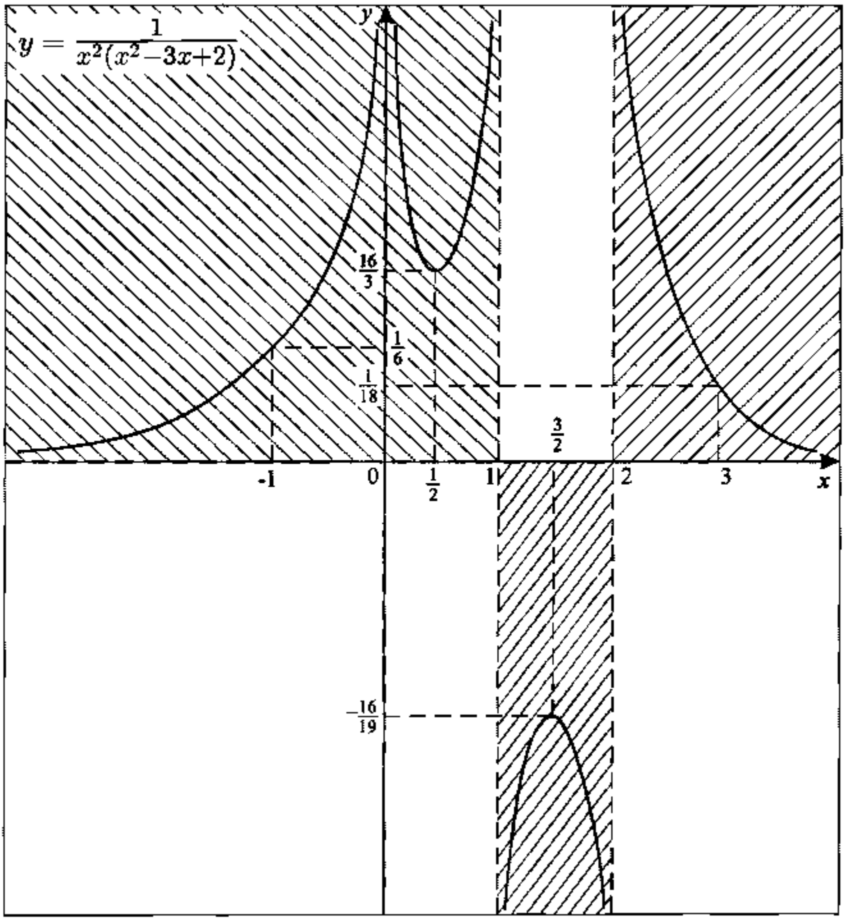
$x = -1;\ y = \frac{1}{1(1+3+2)} = \frac{1}{6}$;

$x = \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)} = \frac{16}{3}$;

$x = \frac{3}{2};\ y = \frac{1}{\frac{9}{4}\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+2\right)} = -\frac{16}{9}$;

$x = 3;\ y = \frac{1}{9(9-9+2)} = \frac{1}{18}$.

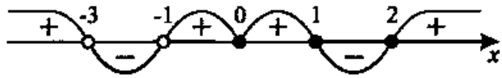
Эскиз графика:



На осях дан разный масштаб.

26. $y = \frac{x^2(x^2-3x+2)}{(x+3)(x+1)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq -3, \\ x \neq -1. \end{cases}$ 2) $y = \frac{x^2(x-1)(x-2)}{(x+3)(x+1)}$.



3) $(x \to -1+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -1-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$.

$$\frac{x^2\left(x^2-3x+2\right)}{(x+3)(x+1)} = \frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2+4x+3}.$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
-\; x^4 - 3x^3 + & 2x^2 & & & x^2+4x+3 \\
\underline{x^4 + 4x^3 +} & \underline{3x^2} & & & \overline{x^2-7x+27} \\
-7x^3 - & x^2 & & & \\
-\; \underline{-7x^3 -} & \underline{28x^2 -} & \underline{21x} & & \\
 & 27x^2 + & 21x & & \\
 & -\; \underline{27x^2 +} & \underline{108x +} & \underline{81} & \\
 & - & 87x - & 81 &
\end{array}$$

Итак, $y = x^2 - 7x + 27 - \frac{87x+81}{x^2+4x+3}$;
$y = (x-3{,}5)^2 + 14{,}75 - \frac{87x+81}{x^2+4x+3}$.

При $87x + 81 = 0$ $x = -\frac{81}{87}$ — абсцисса точки пересечения графика $y = y(x)$ и асимптотической кривой $y = x^2 - 7x + 27$ (парабола).

4) Контрольные точки:

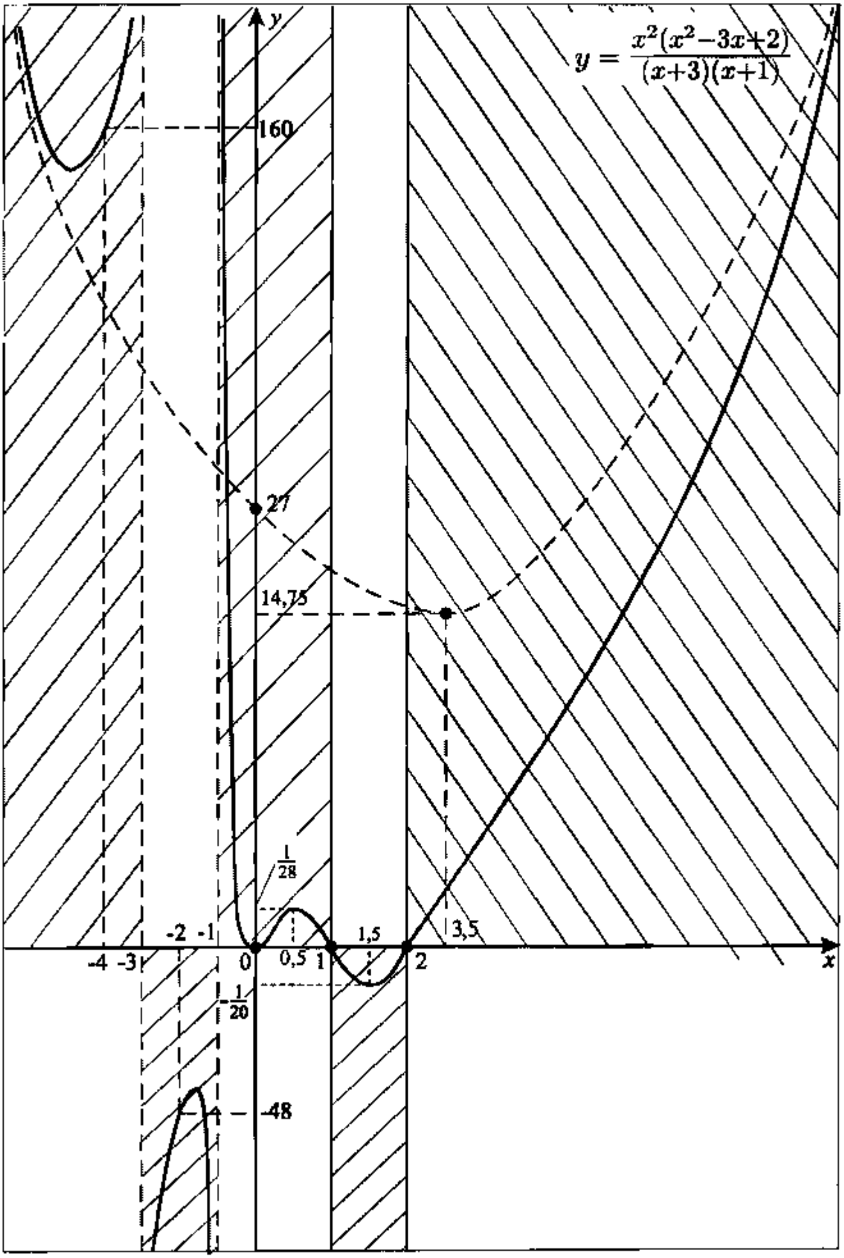
$x_1 = -4$; $y_1 = \frac{16(16+12+2)}{-1\cdot(-3)} = \frac{16\cdot 30}{3} = 160$;

$x_2 = -2$; $y_2 = \frac{4(4+6+2)}{1\cdot(-1)} = -48$;

$x_3 = 0{,}5$; $y_3 = \frac{0{,}25(0{,}25-1{,}5+2)}{3{,}5\cdot 1{,}5} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{1}{28}$;

$x_4 = 1{,}5$; $y_4 = \frac{\frac{9}{4}\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+2\right)}{\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{2}} = -\frac{1}{20}$.

Эскиз графика:



На осях дан разный масштаб.

27. $y = e^{\frac{x^3-3x}{x^4-5x^2+4}}$.

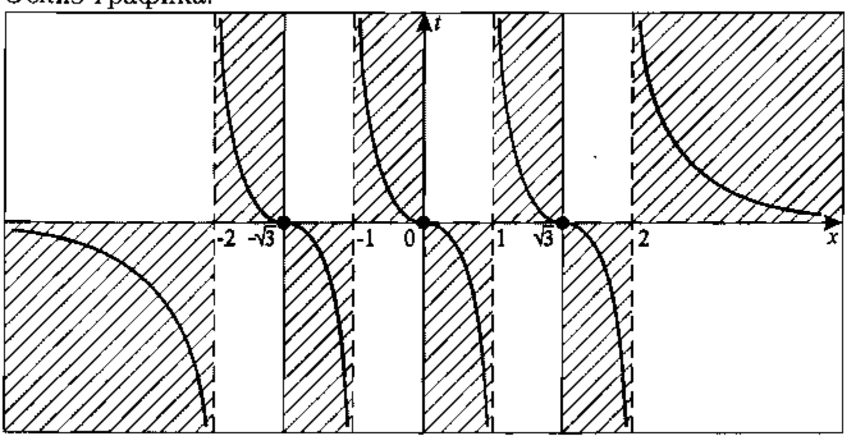
Построим **вначале** $t(x) = \frac{x^3-3x}{x^4-5x^2+4}$.

1) $D(t)$: $\begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$

2) $t = \frac{x(x^2-3)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$.

3) $$\begin{aligned} (x \to 2+0) &\Rightarrow (t \to +\infty); \\ (x \to 2-0) &\Rightarrow (t \to -\infty); \\ (x \to 1+0) &\Rightarrow (t \to +\infty); \\ (x \to 1-0) &\Rightarrow (t \to -\infty); \\ (x \to -1+0) &\Rightarrow (t \to +\infty); \\ (x \to -1-0) &\Rightarrow (t \to -\infty); \\ (x \to -2+0) &\Rightarrow (t \to +\infty); \\ (x \to -2-0) &\Rightarrow (t \to -\infty); \\ (x \to \infty) &\Rightarrow (t \to 0). \end{aligned}$$

Эскиз графика:



4) Строим $y = y(x)$.

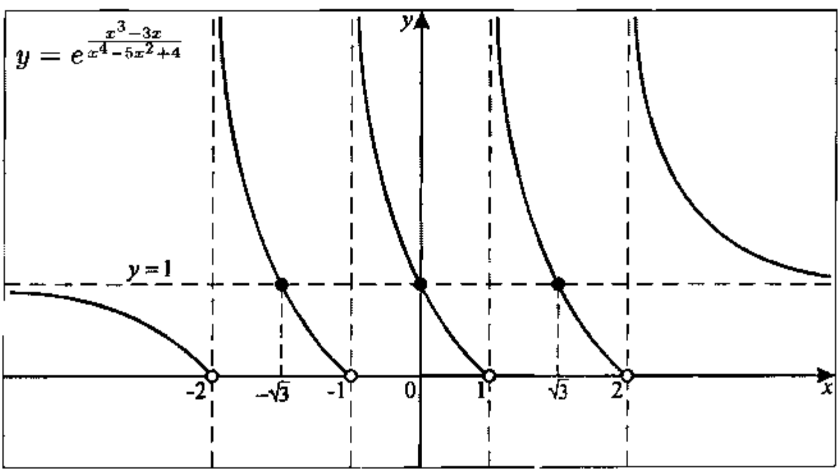
а) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$

б) $y > 0$ для всех $x \in D(y)$, так как $a^m > 0$ для всех m;

в) $(x \to 2+0) \Rightarrow (t(x) \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (t(x) \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
$(x \to 1+0) \Rightarrow (t(x) \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (t(x) \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
$(x \to -1+0) \Rightarrow (t(x) \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -1-0) \Rightarrow (t(x) \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (t(x) \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -2-0) \Rightarrow (t(x) \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (t(x) \to 0) \Rightarrow (y \to 1)$.

г) абсциссы точек пересечения для $t(x)$ и оси Ox те же, что и абсциссы точек пересечения горизонтальной асимптоты $y = 1$ и графика $y = y(x)$.
$x_1 = \sqrt{3}$; $y_1 = 1$;
$x_2 = 0$; $y_2 = 1$;
$x_3 = -\sqrt{3}$; $y_3 = 1$.

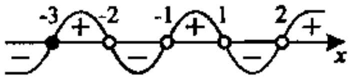
Эскиз готов.



28. $y = \frac{x+3}{x^4-5x^2+4}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$

2) $y = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$

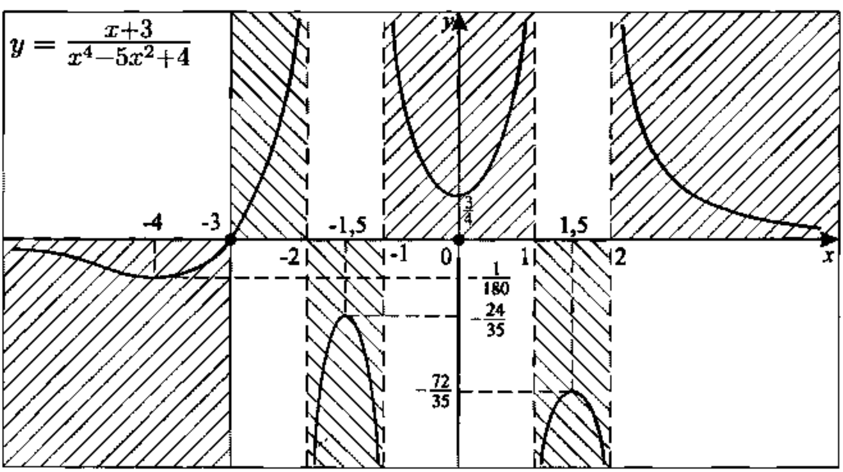


3)
$$\begin{aligned}
(x \to 2+0) &\Rightarrow (y \to +\infty);\\
(x \to 2-0) &\Rightarrow (y \to -\infty);\\
(x \to 1+0) &\Rightarrow (y \to -\infty);\\
(x \to 1-0) &\Rightarrow (y \to +\infty);\\
(x \to -1+0) &\Rightarrow (y \to +\infty);\\
(x \to -1-0) &\Rightarrow (y \to -\infty);\\
(x \to -2+0) &\Rightarrow (y \to -\infty);\\
(x \to -2-0) &\Rightarrow (y \to +\infty);\\
(x \to \infty) &\Rightarrow (y \to 0).
\end{aligned}$$

4) Контрольные точки:

$x = -4$; $y = -\frac{1}{180}$; $x = -1{,}5$; $y = -\frac{24}{35}$;

$x = 0$; $y = \frac{3}{4}$; $x = 1{,}5$; $y = -2\frac{2}{35}$.

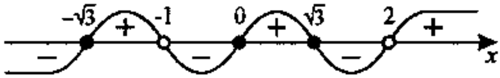


29. $y = e^{\frac{x^3-3x}{x^2-x-2}}$.

1) $t(x) = \frac{x^3-3x}{x^2-x-2}$.

$D(t)$: $\begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq -1. \end{cases}$

2) $t(x) = \frac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-2)(x+1)}$.



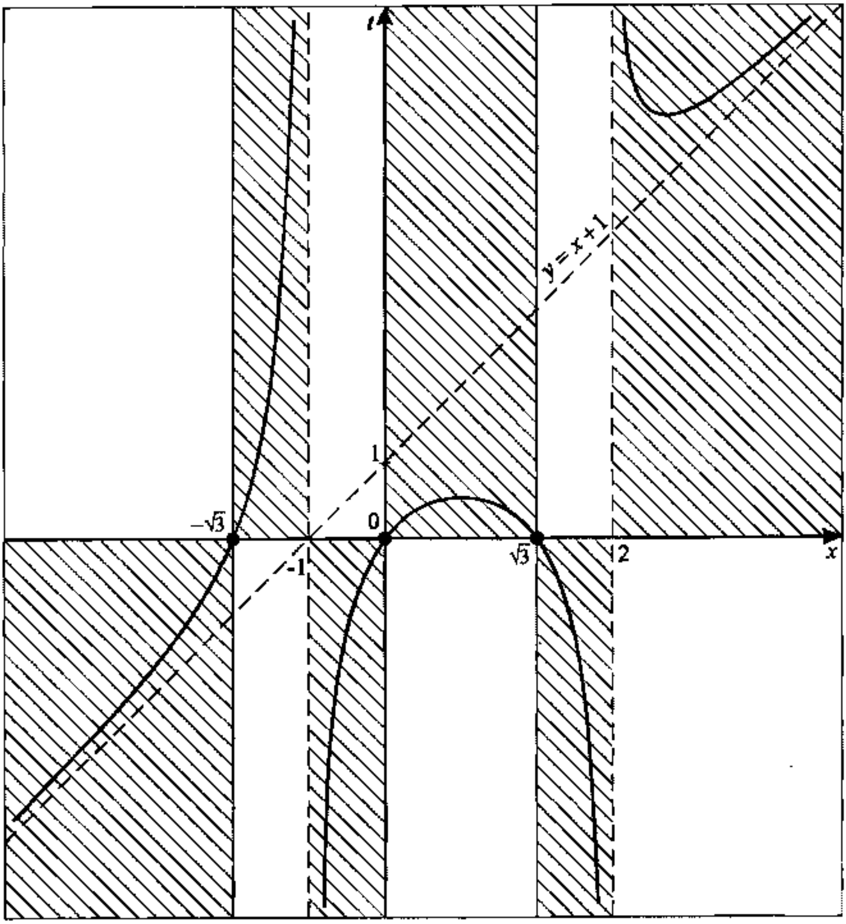
3) $(x \to 2+0) \Rightarrow (t \to +\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (t \to -\infty)$;
$(x \to -1+0) \Rightarrow (t \to -\infty)$;
$(x \to -1-0) \Rightarrow (t \to +\infty)$.

$$\begin{array}{rl|l} - & x^3 \qquad -3x & x^2-x-2 \\ \cline{3-3} & \underline{x^3 - x^2 - 2x} & x+1 \\ & - \; x^2 - \; x & \\ & \underline{x^2 - \; x - 2} & \\ & 2 & \end{array}$$

Таким образом,

$\frac{x^3-3x}{x^2-x-2} = x + 1 + \frac{2}{x^2-x-2}$.

Так как $\frac{2}{x^2-x-2} \neq 0$ при всех x, значит $t = x+1$ **не** пересекает график $t = t(x)$.



4) $y = e^{\frac{x^3-3x}{x^2-x-2}}$.

а) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq -1; \end{cases}$

б) $y > 0$ при всех x;

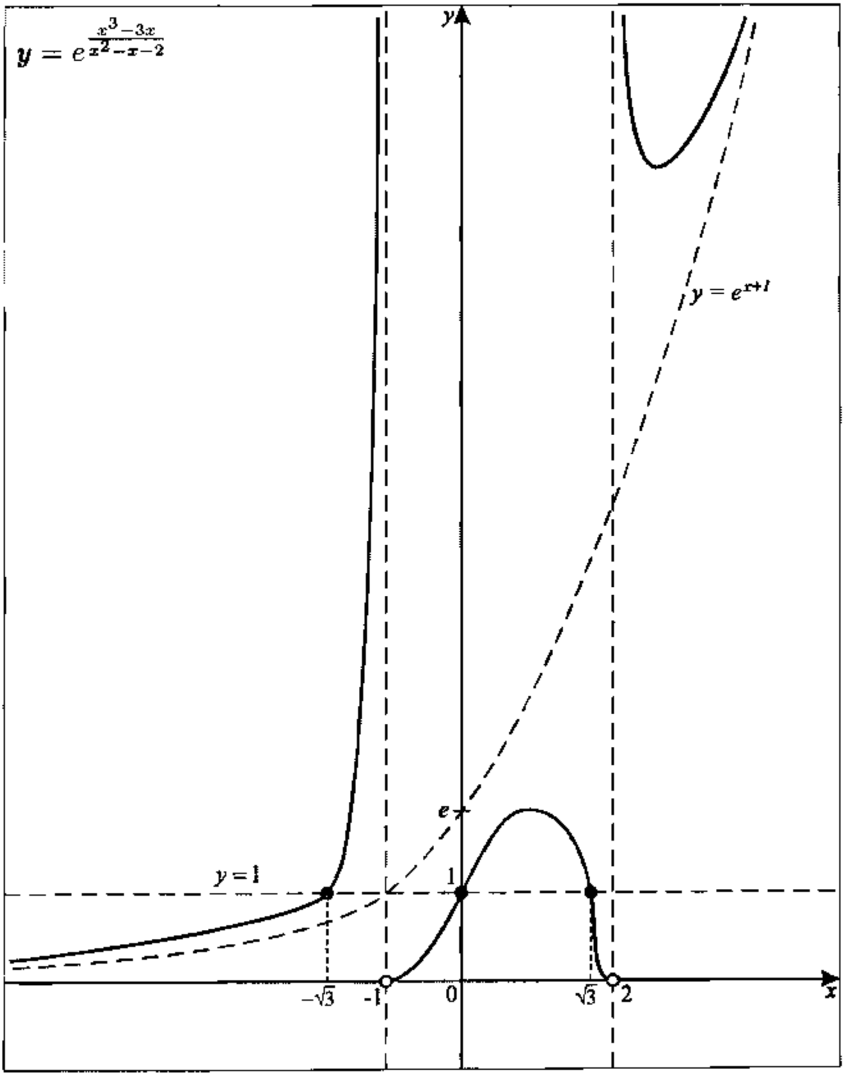
в) $(x \to 2+0) \Rightarrow (t(x) \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (t(x) \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
$(x \to -1+0) \Rightarrow (t(x) \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
$(x \to -1-0) \Rightarrow (t(x) \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (t(x) \to x+1) \Rightarrow (y \to e^{x+1})$;

г) $y(0) = e^0 = 1;$

$y(-\sqrt{3}) = e^0 = 1;\ \ y(\sqrt{3}) = e^0 = 1.$

Пересекает ли график $y = y(x)$ асимптотическую кривую $y = e^{x+1}$?

Нет, так как график $y = y(x)$ и $y = x + 1$ не пересекаются. Итак, эскиз готов.

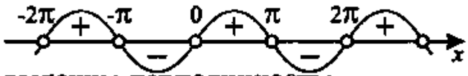


30. $y = e^{\frac{1}{\sin x}}$.

Построим вспомогательный график $t(x)$.

1) $t(x) = \frac{1}{\sin x}$, $k \in \mathbb{Z}$

а) $D(t)$: $\sin x \neq 0 \quad x \neq \pi k, \; k \in \mathbb{Z}$

б) 

в) выясним периодичность:

$D(t)$ — симметричное множество.

$\frac{1}{\sin(x+T)} = \frac{1}{\sin x}$; $\quad \frac{\sin(x+T) - \sin x}{\sin x \cdot \sin(x+T)} = 0$,

т. е. $\sin(x+T) = \sin x$, но $\varphi(x) = \sin x$ — периодическая с периодом $T_0 = 2\pi$;

г) рассмотрим $y = t(x)$ на $(-\pi; \pi)$:

$(x \to \pi - 0) \Rightarrow (t \to +\infty)$;

$(x \to 0 + 0) \Rightarrow (t \to +\infty)$;

$(x \to 0 - 0) \Rightarrow (t \to -\infty)$;

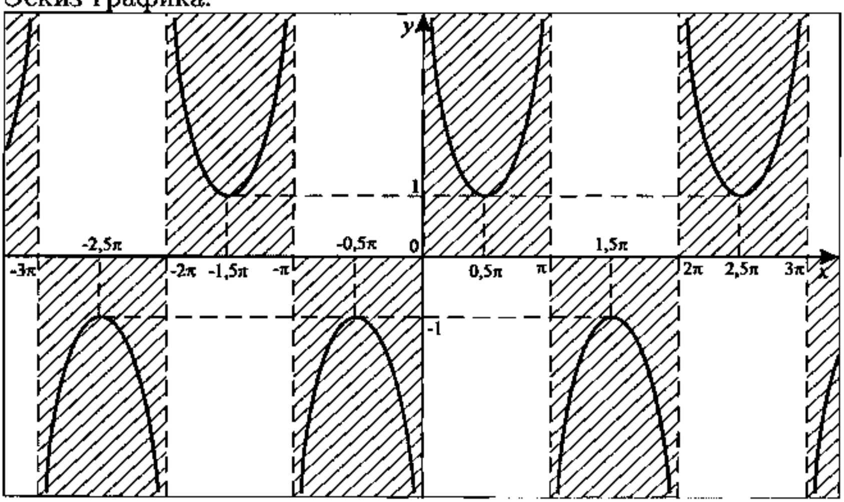
$(x \to -\pi + 0) \Rightarrow (t \to -\infty)$;

д) $\varphi(x) = \sin x$ для $\varphi_{\max} = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow t\left(\frac{\pi}{2}\right) = t_{\min} = 1$;

$\varphi_{\min} = \varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t\left(-\frac{\pi}{2}\right) = t_{\max} = -1$.

Эскиз графика:



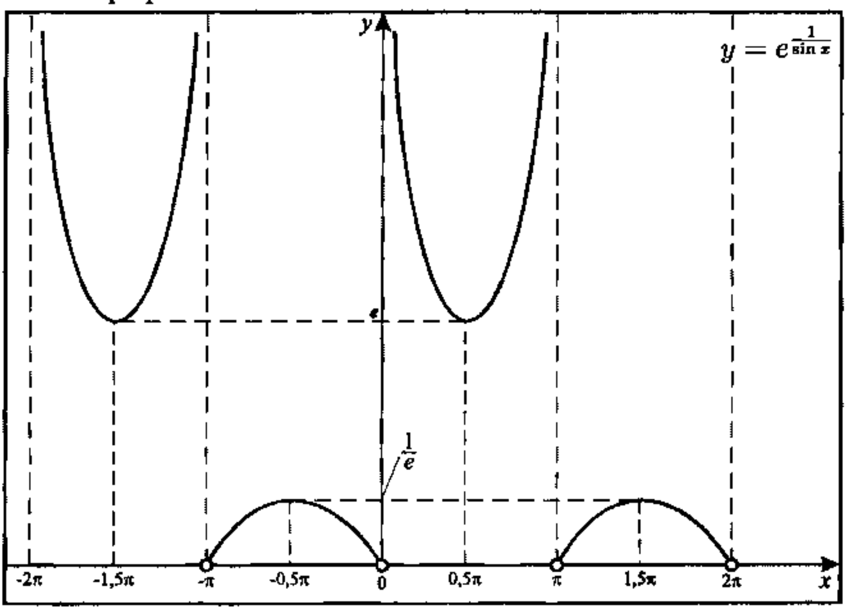
2) $y = e^{\frac{1}{\sin x}}$.

а) $D(y)$: $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) $y > 0$ при всех x из $D(y)$

в) $(x \to \pi - 0) \Rightarrow (t(x) \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 0 + 0) \Rightarrow (t(x) \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 0 - 0) \Rightarrow (t(x) \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
$(x \to -\pi + 0) \Rightarrow (t(x) \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^1 = y_{\max}$;
$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-1} = y_{\min}$.

Эскиз графика:



На осях дан разный масштаб.

3

Зачетные карточки

Условия зачетных карточек

Исследуйте функции и постройте графики.

Карточка 1

1. $y = \frac{2x^2+x+2}{x^2-x-2}$.

2. $y = \frac{x^3+x}{x^2-2x+2}$.

3. $y = \frac{(x+3)(x-1)^2}{-\frac{1}{4}x^4+x^2}$.

Карточка 2

1. $y = \frac{(x+3)^2(x-1)^2}{-\frac{1}{4}x^4+x^2}$.

2. $y = \frac{(x-1)(x-4)}{x(x+1)^2}$.

3. $y = \frac{4(x^4-4x^2)}{(x+3)(x-1)^2}$.

Карточка 3

1. $y = \dfrac{4(x^4-4x^2)}{(x+3)^2(x-1)^2}$.

2. $y = \dfrac{x^4-4x^2}{(x+3)^2(x-1)}$.

3. $y = \dfrac{x+3}{x^2(x^2-3x+2)}$.

Карточка 4

1. $y = \dfrac{(x+3)^2(x-1)}{-\frac{1}{4}x^4+x^2}$.

2. $y = \dfrac{2x^3}{(4-x^2)(x+3)}$.

3. $y = \dfrac{x(x+1)(x-3)}{(x-4)^2}$.

Карточка 5

1. $y = \dfrac{2(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}$.

2. $y = \dfrac{(x+1)^2x}{(x-1)(x-4)}$.

3. $y = \dfrac{(x-4)^2}{x(x+1)(x+3)}$.

Карточка 6

1. $y = \dfrac{x^2+x-2}{(x-3)(4x-x^2)}$.

2. $y = \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-5x+4}$.

3. $y = \dfrac{(x^2+3x+2)(x-4)}{x^2+2x-3}$.

Карточка 7

1. $y = \frac{x^2-4x+3}{x^2+5x+4}$.

2. $y = \frac{2(x^2+2x-3)^2}{(x^2+3x+2)(x-4)}$.

3. $y = \frac{x^2-x-6}{(x^2-5x+4)x}$.

Карточка 8

1. $y = \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+3}$.

2. $y = \frac{x(x-1)(x-4)}{(x-2)^2}$.

3. $y = \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x+4)x}$.

Карточка 9

1. $y = \frac{2(x^2+3x+2)(x-4)}{(x-1)(x^2-9)}$.

2. $y = \frac{x^2-1}{x^3+6x^2+8x}$.

3. $y = e^{\frac{x^3-4x}{x^2-1}}$.

Карточка 10

1. $y = \frac{(x-3)(x^2+2x-3)}{(x^2-3x-4)(x+2)}$.

2. $y = \frac{(x-3)(4x-x^2)}{x^2+x-2}$.

3. $y = e^{\frac{4+x^2}{x^3-9x}}$.

Решения зачетных карточек

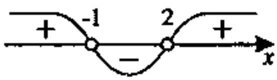
Зачетная карточка 1

1. $y = \frac{2x^2+x+2}{x^2-x-2}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq -1. \end{cases}$

2) $y = \frac{2x^2+x+2}{(x-2)(x+1)}$;

$2x^2 + x + 2 > 0$ при всех x, так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -15 < 0. \end{cases}$



3) $$\begin{aligned} (x \to 2+0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\ (x \to 2-0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\ (x \to -1+0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\ (x \to -1-0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\ (x \to \infty) &\Rightarrow (y \to 2), \end{aligned}$$

так как $\frac{2x^2+x+2}{x^2-x-2} = \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$.

Выясним возможность пересечения графика $y{=}y(x)$ и $y = 2$.

$\frac{2x^2+x+2}{x^2-x-2} = 2$;

$2x^2 + x + 2 = 2x^2 - 2x - 4$; $x = -2$.

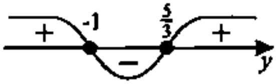
4) Найдем $E(y)$.

$y = \frac{2x^2+x+2}{x^2-x-2}$;

$yx^2 - yx - 2y = 2x^2 + x + 2$;

$(y-2)x^2 - (y+1)x - 2(y+1) = 0$ $(y \neq 2)$;

$D = (y+1)^2 + 8(y+1)(y-2) = (y+1)(y+1+8y-16) =$
$= (y+1)(9y-15) \geqslant 0.$



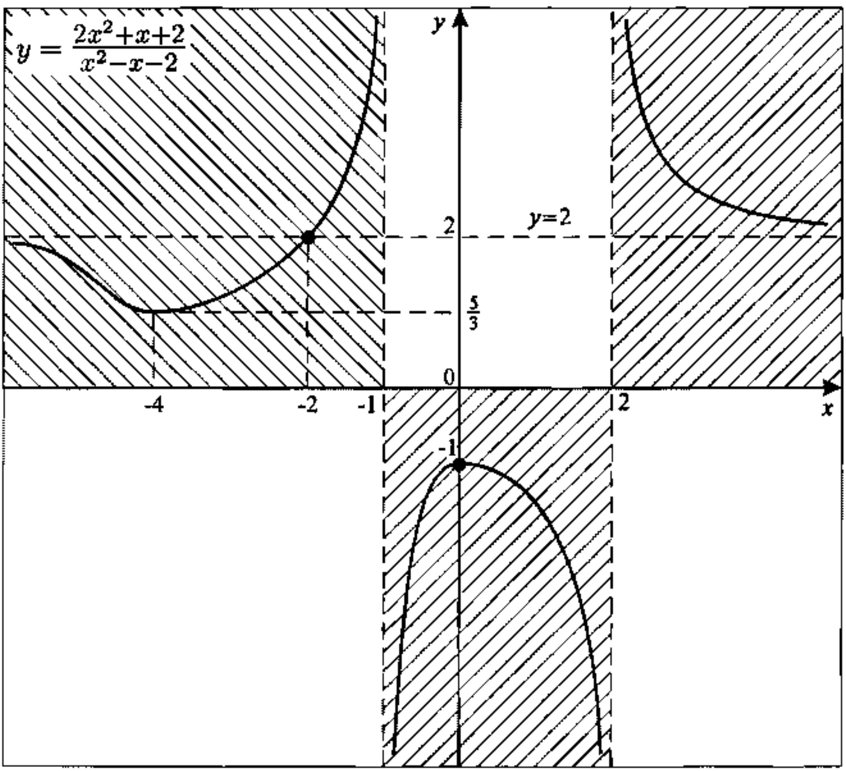
Но при $y = 2 \quad x = -2$,

тогда $E(y) = (-\infty; -1] \cup [1\frac{2}{3}; \infty)$.

$x_0 = -\frac{b}{2a}$; $x_0 = \frac{y+1}{2(y-2)}$.

Пусть $y_1 = -1$; $x_1 = 0$.

Пусть $y_2 = \frac{5}{3}$; $x_2 = -4$; $y_{\max} = -1$; $y_{\min} = \frac{5}{3}$.



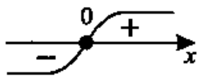
Примечания. На $(-\infty; -4]$ $y = y(x)$ убывает;
на $[-4; -1)$ $y = y(x)$ возрастает;
на $(-1; 0]$ $y = y(x)$ возрастает;
на $[0; 2)$ $y = y(x)$ убывает;
на $(2; \infty)$ $y = f(x)$ убывает.

2. $y = \frac{x^3+x}{x^2-2x+2}$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

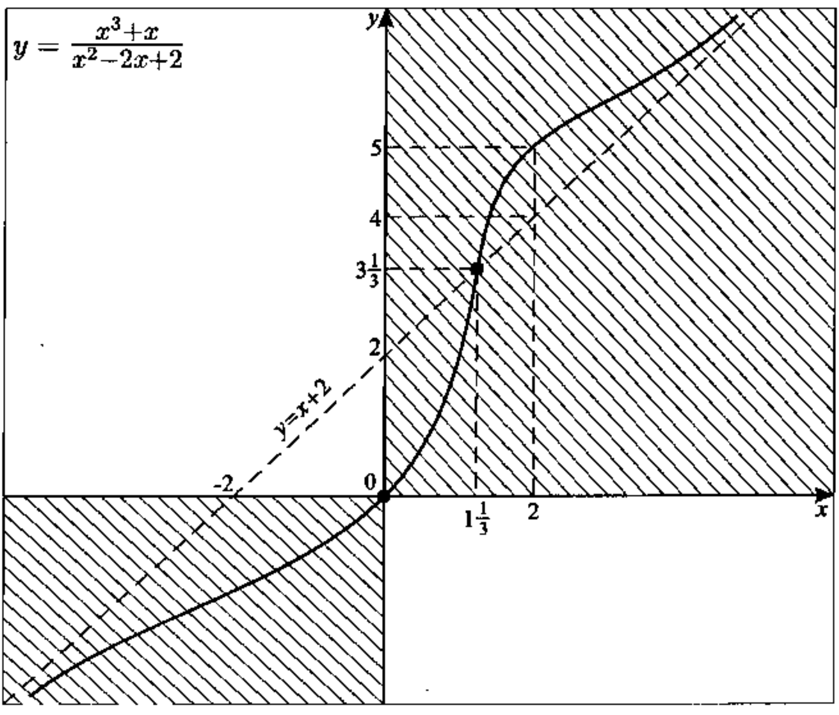
$x^2 - 2x + 2 > 0$ при всех x, так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -1 < 0. \end{cases}$

2) $y = \frac{x(x^2+1)}{x^2-2x+2}$.



3) $$\begin{array}{r|l} x^3 \qquad + x & x^2 - 2x + 2 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3 - 2x^2 + 2x} & x + 2 \\ 2x^2 - x & \\ -\underline{2x^2 - 4x + 4} & \\ 3x - 4 & \end{array}$$

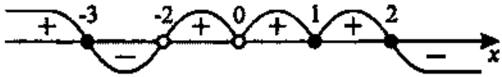
$y = x + 2 + \frac{3x-4}{x^2-2x+2}$. При $x_1 = \frac{4}{3}$ график $y = y(x)$ пересекает $y = x + 2$; $y_1 = 3\frac{1}{3}$.



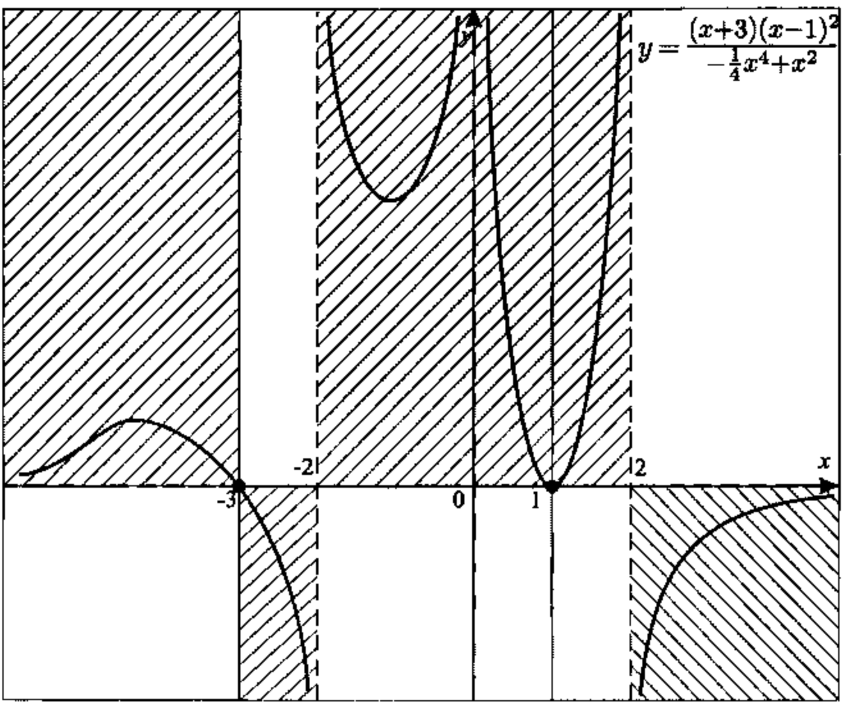
3. $y = \frac{(x+3)(x-1)^2}{-\frac{1}{4}x^4+x^2}$.

$$y = \frac{-4(x+3)(x-1)^2}{x^2(x+2)(x-2)}.$$

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq \pm 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$

2) 

3)
$$(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$$
$$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to -\infty);$$
$$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0).$$

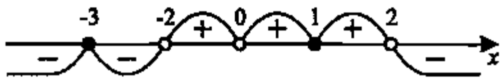


Зачетная карточка 2

1. $y = \frac{(x+3)^2(x-1)^2}{-\frac{1}{4}x^4+x^2}$.

$$y = \frac{-4(x+3)^2(x-1)^2}{x^2(x+2)(x-2)}.$$

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq \pm 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$

2) 

3) $$\begin{aligned}
&(x \to 2+0) &&\Rightarrow (y \to -\infty);\\
&(x \to 2-0) &&\Rightarrow (y \to +\infty);\\
&(x \to 0+0) &&\Rightarrow (y \to +\infty);\\
&(x \to 0-0) &&\Rightarrow (y \to +\infty);\\
&(x \to -2+0) &&\Rightarrow (y \to +\infty);\\
&(x \to -2-0) &&\Rightarrow (y \to -\infty);\\
&(x \to \infty) &&\Rightarrow (y \to -4),
\end{aligned}$$

так как $$\frac{-4(x+3)^2(x-1)^2}{x^2(x+2)(x-2)} = \frac{-4x^4\left(1+\frac{3}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{x^4\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)} = $$
$$= \frac{-4\left(1+\frac{3}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}.$$

Выясним точки пересечения графика $y = y(x)$ и $y = -4$.

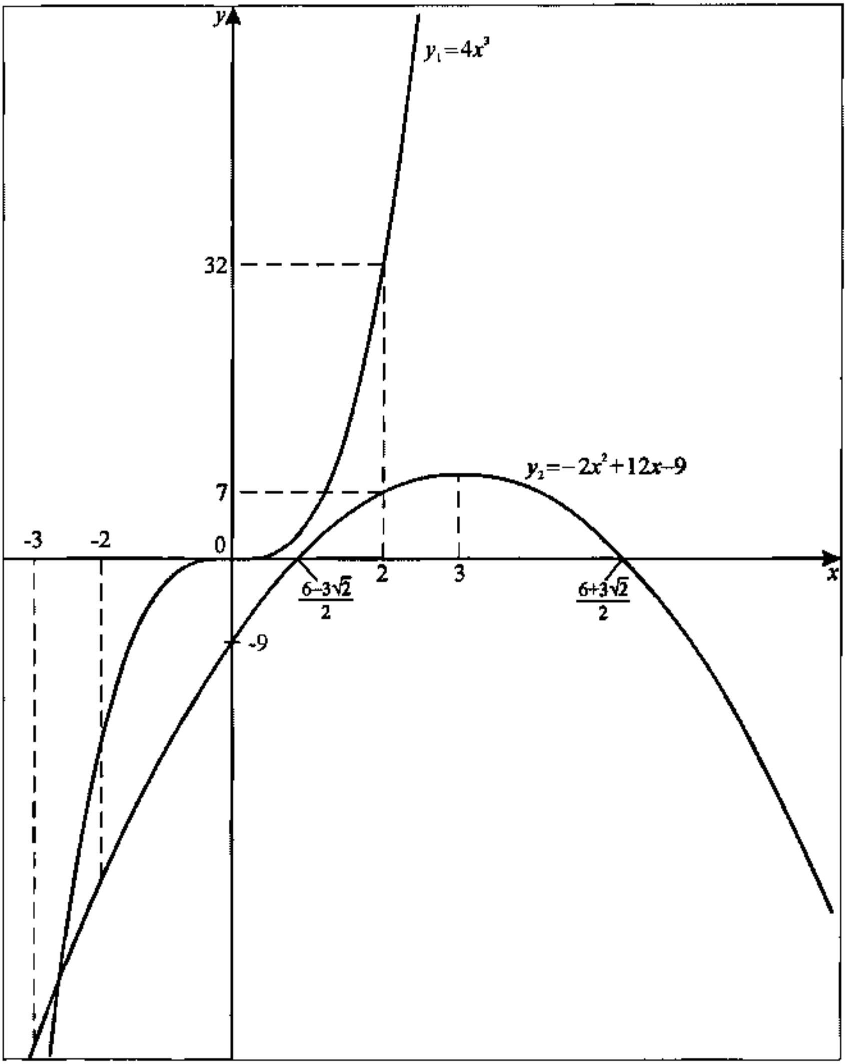
$$\frac{-4(x+3)^2(x-1)^2}{x^2(x+2)(x-2)} = -4; \ (x^2+2x-3)^2 = x^4 - 4x^2$$

$$\left((a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\right);$$

$$x^4 + 4x^2 + 9 + 4x^3 - 6x^2 - 12x = x^4 - 4x^2;$$

$$4x^3 + 2x^2 - 12x + 9 = 0; \ 4x^3 = -2x^2 + 12x - 9.$$

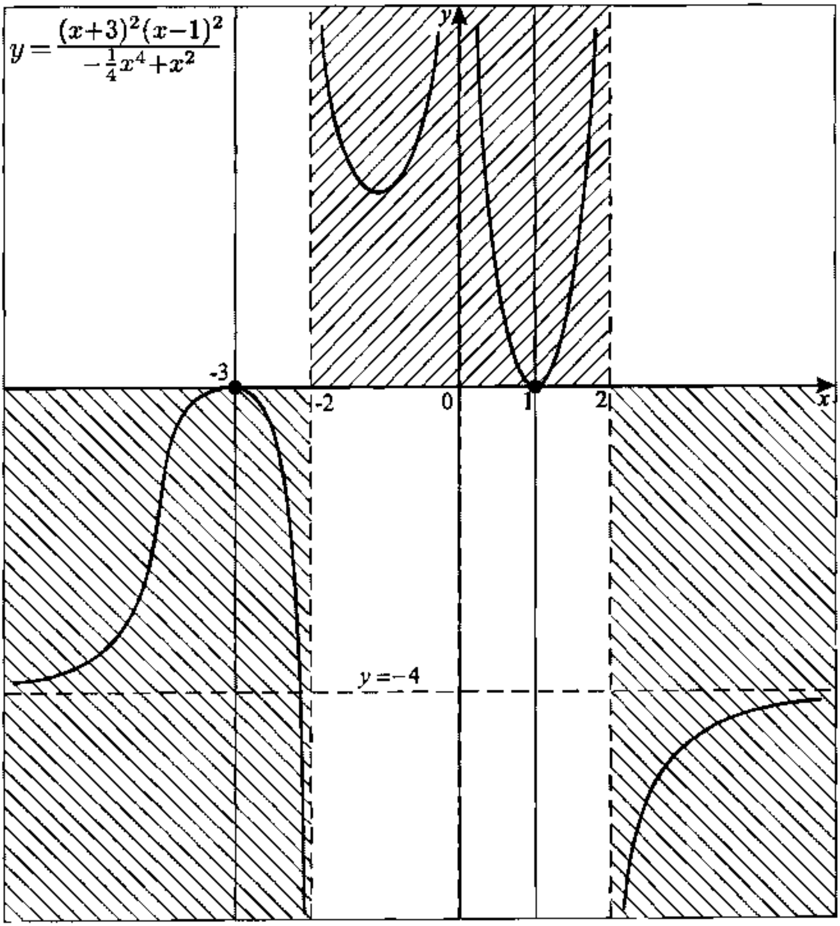
Решим это уравнение графически.



$y_1 = 4x^3$; $y_2 = -2x^2 + 12x - 9$.

Пусть $t(x) = 4x^3 + 2x^2 - 12x + 9 = 0$.
Так как $(x \to +\infty) \Rightarrow (t \to +\infty)$;
$(x \to -\infty) \Rightarrow (t \to -\infty)$, то
существует один корень на $(-3; -2)$.

На $(-2; +\infty)$ и на $(-\infty; -3)$ корней нет.



Примечание.

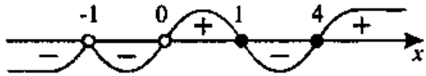
$y_1(-2) = -32$; $y_2(-2) = -41$, тогда $y_1(-2) > y_2(-2)$.

$y_1(-3) = -108$; $y_2(-3) = -63$, тогда $y_1(-3) < y_2(-3)$.

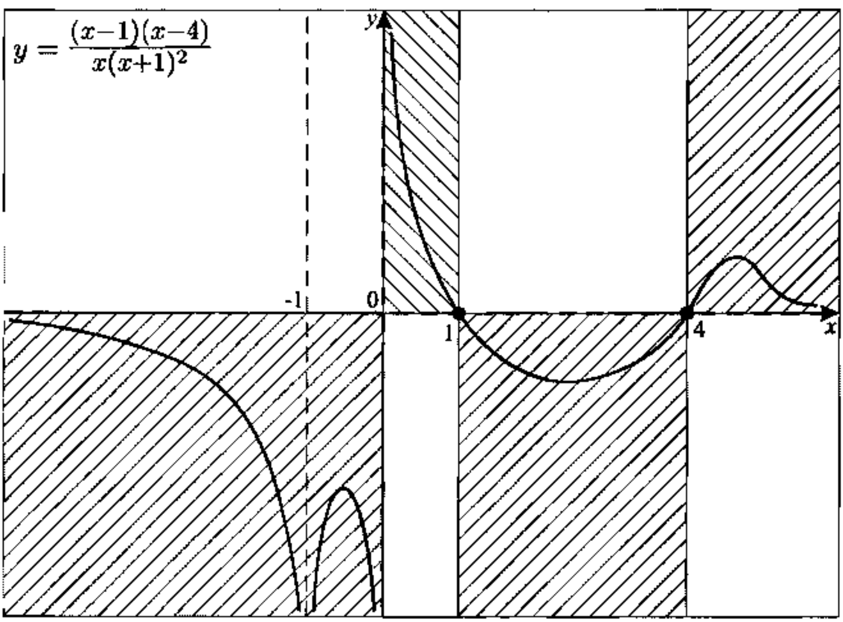
На $(-\infty; -3)$ корней нет, так как $y_1 = 4x^3$ возрастает на $(-\infty; -3)$ быстрее, чем $y_2 = -2x^2 + 12x - 9$.

2. $y = \frac{(x-1)(x-4)}{x(x+1)^2}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$

2) 

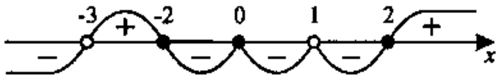
3) $(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -1+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -1-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.



3. $y = \frac{4(x^4-4x^2)}{(x+3)(x-1)^2}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq -3, \\ x \neq 1. \end{cases}$

2) $y = \frac{4x^2(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-1)^2}$.



3) $(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

$(x+3)(x-1)^2 = x^3 + x^2 - 5x + 3$

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 4x^4 \qquad\quad -16x^2 \qquad\quad \\ \underline{4x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 12x} \qquad\quad \\ -\begin{array}{r} -4x^3 + \ 4x^2 - 12x \qquad \\ \underline{-4x^3 - \ 4x^2 + 20x - 12} \\ 8x^2 - 32x + 12 \end{array} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^3 + x^2 - 5x + 3} \\ 4x - 4 \end{array} \end{array}$$

$y = 4(x-1) + \frac{4(2x^2-8x+3)}{(x+3)(x-1)^2}$; $y = 4x - 4$ — наклонная асимптота.

$2x^2 - 8x + 3 = 0$;

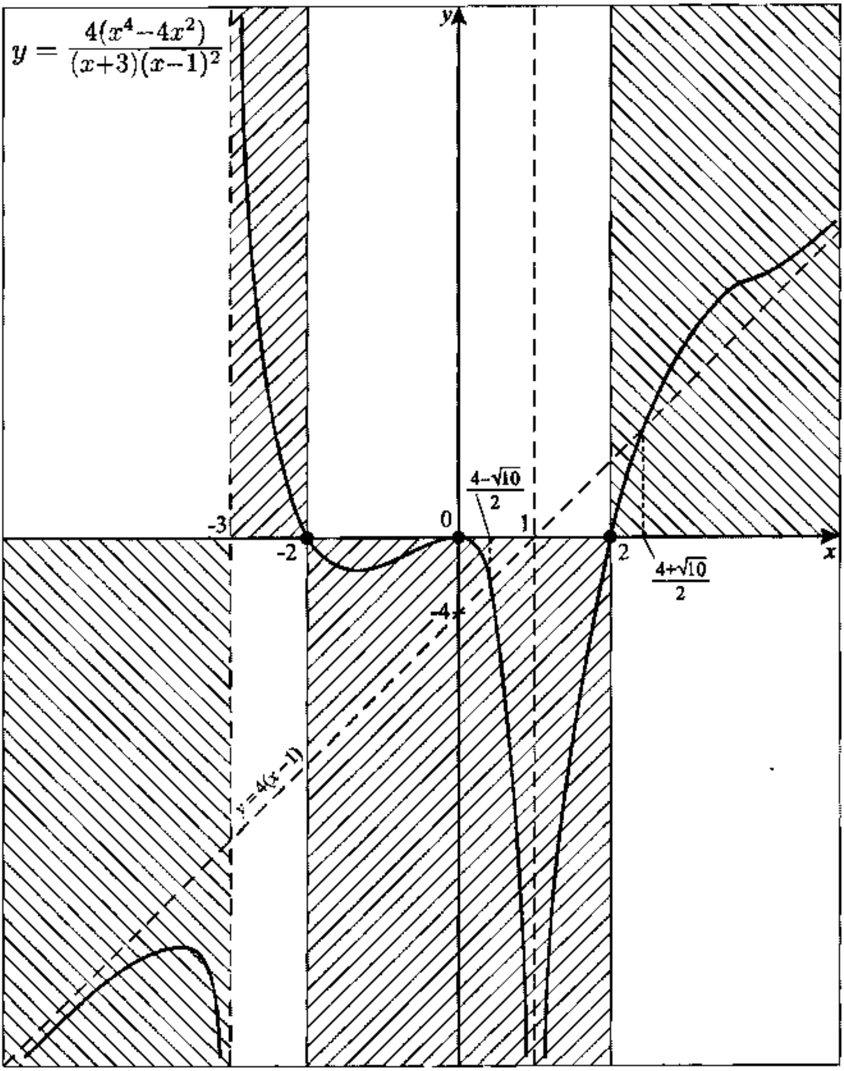
$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-6}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$;

$y_1 = y\left(\frac{4+\sqrt{10}}{2}\right) = 4\left(\frac{4+\sqrt{10}}{2} - 1\right) + 0 = 4 + 2\sqrt{10}$;

$y_2 = y\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}\right) = 4\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2} - 1\right) + 0 = 4 - 2\sqrt{10}$.

Имеем координаты точек пересечения:

$\left(\frac{4+\sqrt{10}}{2}; 4 + 2\sqrt{10}\right)$ и $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}; 4 - 2\sqrt{10}\right)$.


$y = \frac{4(x^4 - 4x^2)}{(x+3)(x-1)^2}$
y
x
0
-3
-2
1
2
-4
$\frac{4-\sqrt{10}}{2}$
$\frac{4+\sqrt{10}}{2}$
$y = 4(x-1)$

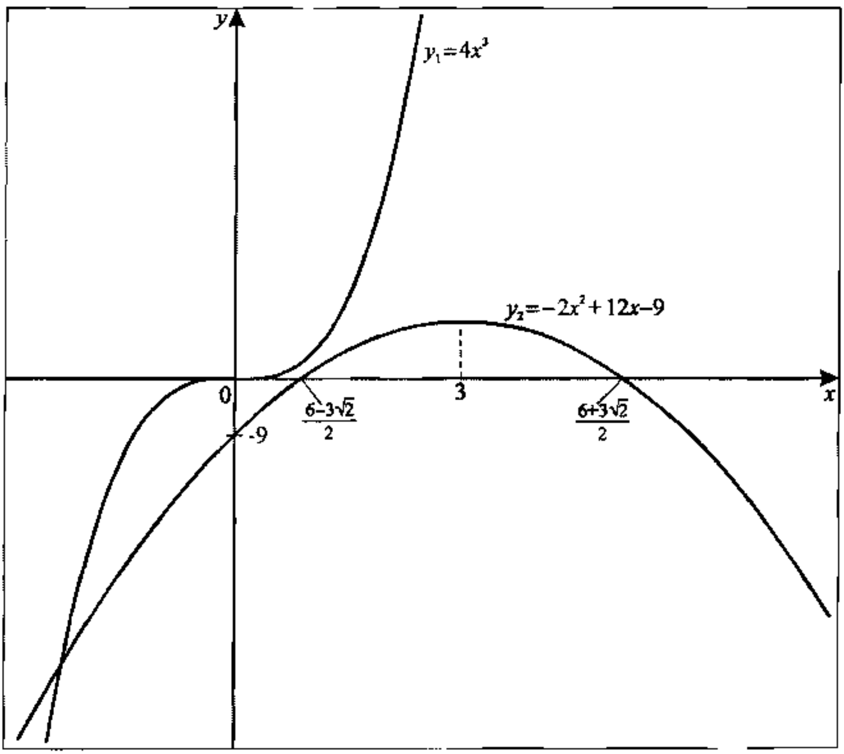
Зачетная карточка 3

1. $y = \frac{4(x^4-4x^2)}{(x+3)^2(x-1)^2}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq -3, \\ x \neq 1. \end{cases}$

2) $y = \frac{4x^2(x+2)(x-2)}{(x+3)^2(x-1)^2}$.

3) $(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 4)$.



Выясним наличие точек пересечения графика $y=y(x)$ и $y=4$.

$4x^2(x+2)(x-2)=4(x+3)^2(x-1)^2;$

$x^4-4x^2=(x^2+2x-3)^2;$

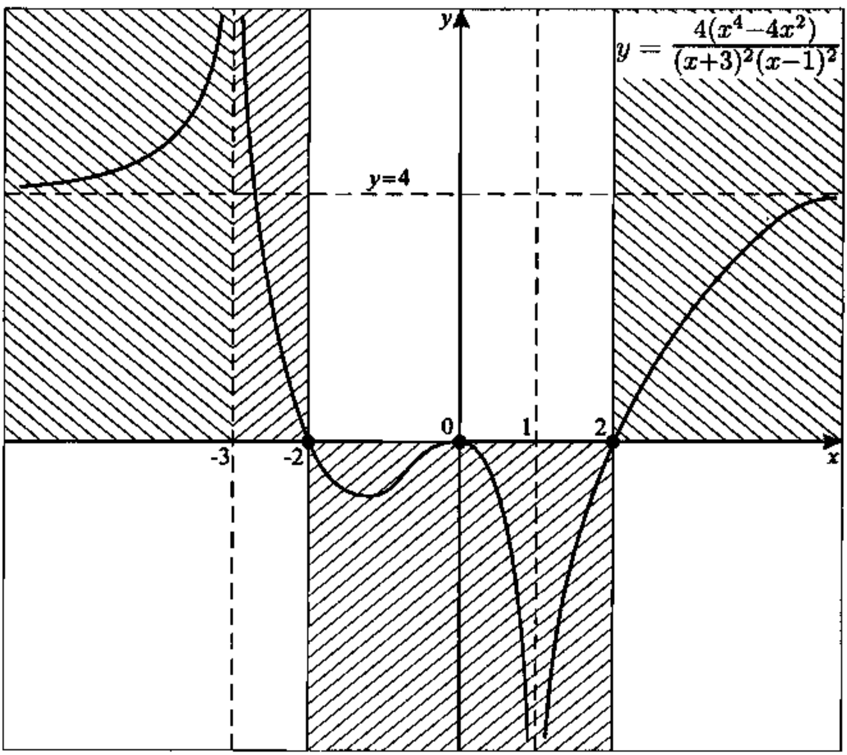
$x^4-4x^2=x^4+4x^2+9+4x^3-6x^2-12x;$

$4x^3+2x^2-12x+9=0.$

Решим это уравнение графически.

$y_1=4x^3;\ \ y_2=-2x^2+12x-9.$

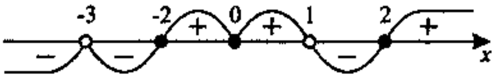
Один корень на $(-3;-2)$ очевиден, так как переход от $+\infty$ к 0 возможен только при пересечении $y=4$ (см. график). Так как $y_1=4x^3$ возрастает быстрее, чем $y_2=-2x^2+12x-9$ на $(-\infty;-3)$, то других корней нет. А на $(-2;+\infty)$ корней вообще нет. Итак, только одна точка пересечения (см. стр. 138).



2. $y = \frac{x^4-4x^2}{(x+3)^2(x-1)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq -3, \\ x \neq 1. \end{cases}$

2) $y = \frac{x^2(x+2)(x-2)}{(x+3)^2(x-1)}$.



3) $(x \to 1+0) \quad \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1-0) \quad \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

$(x+3)^2(x-1) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$

$$\begin{array}{r|l} x^4 \qquad - 4x^2 \qquad\qquad & x^3 + 5x^2 + 3x - 9 \\ -\ x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 9x \qquad & \overline{x - 5} \\ \hline -5x^3 - 7x^2 + 9x \qquad & \\ -\ -5x^3 - 25x^2 - 15x + 45 & \\ \hline 18x^2 + 24x - 45 & \end{array}$$

Итак, $y = x-5+\frac{3(6x^2+8x-15)}{(x+3)^2(x-1)}$; $y = x-5$ — наклонная асимптота.

$6x^2 + 8x - 15 = 0$;

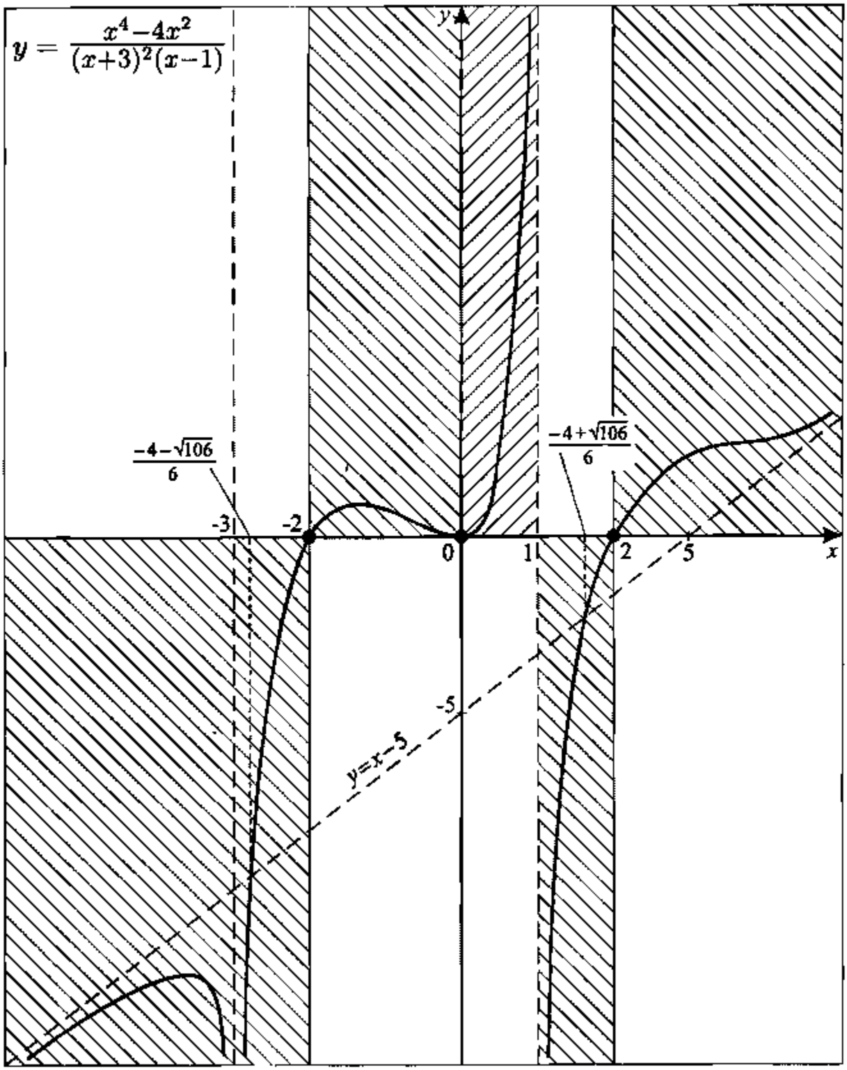
$x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16+90}}{6} = \frac{-4\pm\sqrt{106}}{6}$;

$y_1 = \frac{-4+\sqrt{106}}{6} - 5 = \frac{-34+\sqrt{106}}{6}$;

$y_2 = \frac{-4-\sqrt{106}}{6} - 5 = \frac{-34-\sqrt{106}}{6}$.

Имеем координаты точек пересечения:

$\left(\frac{-4+\sqrt{106}}{6}; \frac{-34+\sqrt{106}}{6}\right)$ и $\left(\frac{-4-\sqrt{106}}{6}; \frac{-34-\sqrt{106}}{6}\right)$.

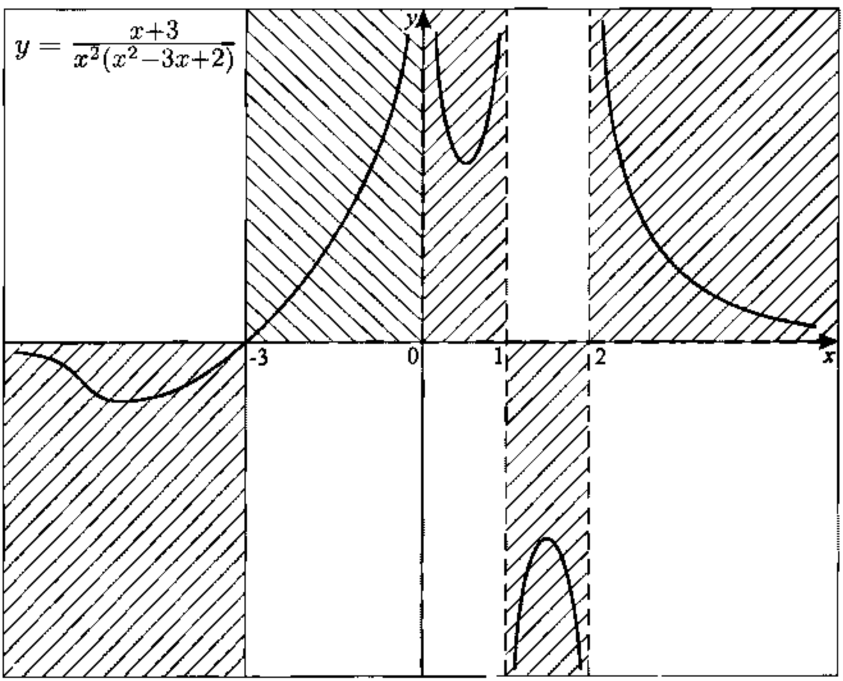

$y = \frac{x^4-4x^2}{(x+3)^2(x-1)}$
y
x
$\frac{-4-\sqrt{106}}{6}$
$\frac{-4+\sqrt{106}}{6}$
-3
-2
0
1
2
5
-5
y=x–5

3. $y = \frac{x+3}{x^2(x^2-3x+2)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq 1; \\ x \neq 0. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.

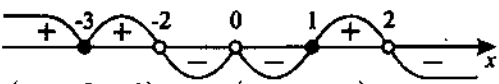


Зачетная карточка 4

1. $y = \frac{(x+3)^2(x-1)}{-\frac{1}{4}x^4+x^2}$.

$y = \frac{-4(x+3)^2(x-1)}{x^2(x-2)(x+2)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq \pm 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$

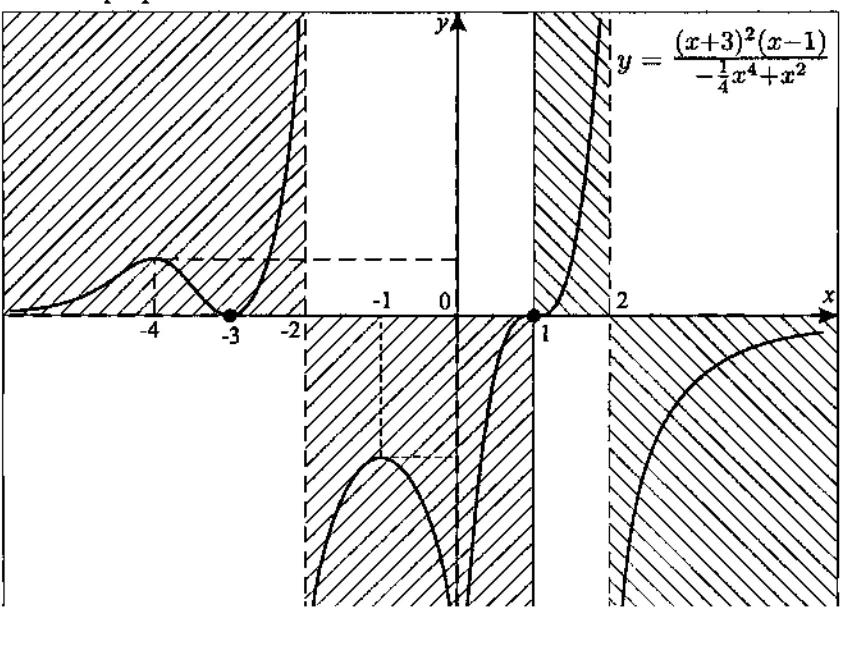
2) 

3) $(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.

4) Контрольные точки:

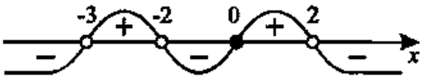
$x = -1,\ y = -10\frac{2}{3}, \quad x = -4{,}4;\ y \approx \frac{2}{9}$.

Эскиз графика:



2. $y = \frac{2x^3}{(4-x^2)(x+3)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq \pm 2, \\ x \neq -3. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to -2)$,

так как $\frac{2x^3}{(4-x^2)(x+3)} = \frac{2}{\left(\frac{4}{x^2}-1\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}$.

Найдем точки пересечения графика $y = y(x)$ и $y = -2$.

$\frac{2x^3}{(4-x^2)(x+3)} = -2$;

$2x^3 = -2(-x^3 - 3x^2 + 4x + 12)$;

$3x^2 - 4x - 12 = 0$;

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+36}}{3} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{3}$.

4) Контрольные точки:

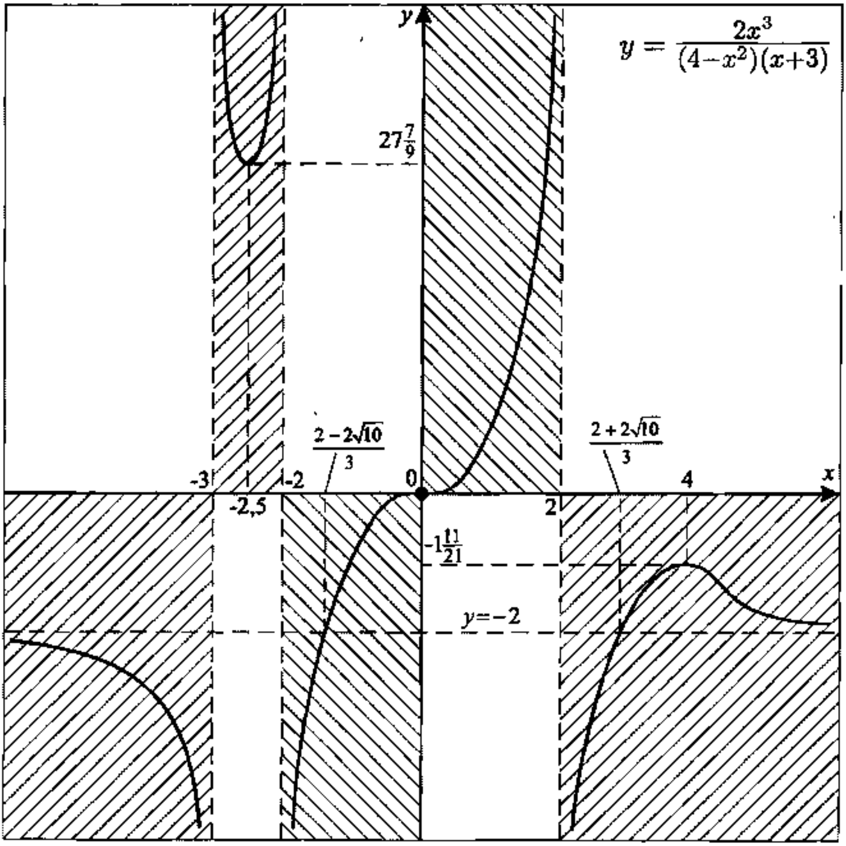
$x = -2{,}5$;

$y(-2{,}5) = \frac{-2 \cdot \frac{125}{8}}{\left(4-\frac{25}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{250}{9} = 27\frac{7}{9}$;

$x = 4$;

$y(4) = \frac{2 \cdot 64}{(4-16)(4+3)} = -\frac{32}{21} = -1\frac{11}{21}$.

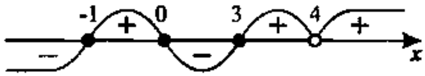
Эскиз графика:



На осях разный масштаб.

3. $y = \frac{x(x+1)(x-3)}{(x-4)^2}$.

1) $D(y)$: $x \neq 4$.

2) 

3) $(x \to 4+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 4-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$\frac{x(x+1)(x-3)}{(x-4)^2} = \frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-8x+16}$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-3x & x^2-8x+16 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3-8x^2+16x} & x+6 \\ 6x^2-19x & \\ -\underline{6x^2-48x+96} & \\ 29x-96 & \end{array}$$

$y = x+6+\frac{29x-96}{(x-4)^2}$; $y = x+6$ — наклонная асимптота.

$29x - 96 = 0$; $x = 3\frac{9}{29}$.

При необходимости можно установить координаты точки пересечения асимптоты $y = x+6$ с графиком функции $y = \frac{x(x+1)(x-3)}{(x-4)^2}$.

Для этого необходимо вычислить

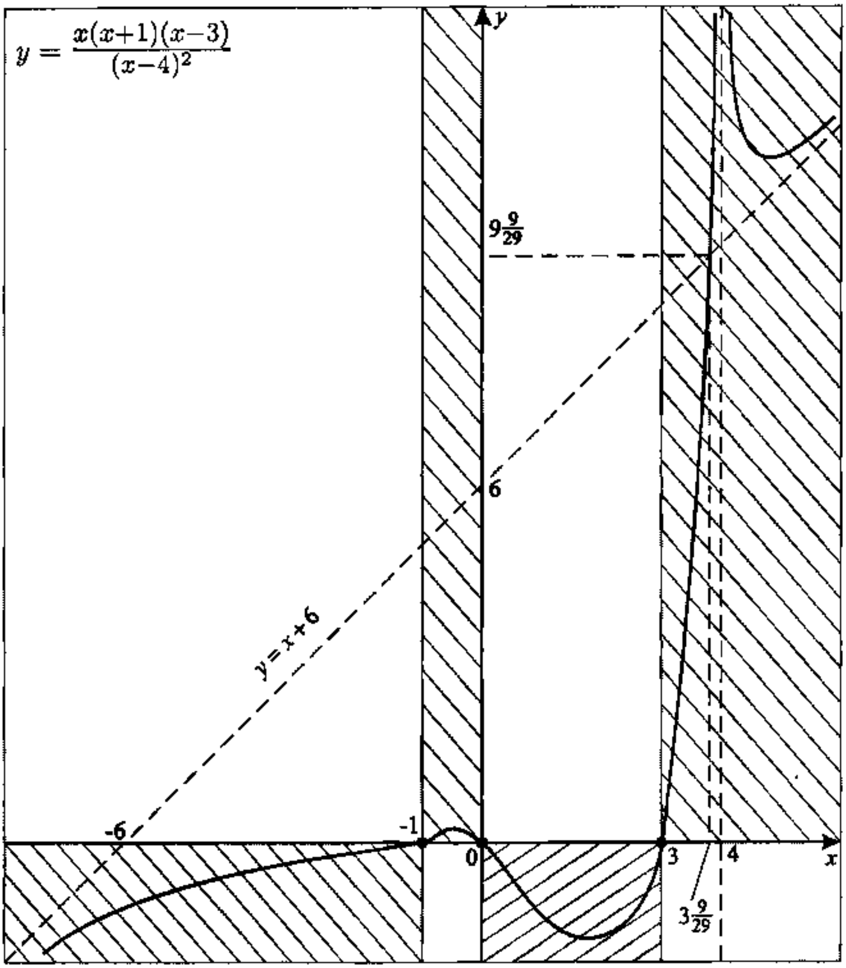
$y\left(3\frac{9}{29}\right) = \frac{3\frac{9}{29}\cdot 4\frac{9}{29}\cdot\frac{9}{29}}{\left(\frac{20}{29}\right)^2}$, где $y(x) = \frac{x(x+1)(x-3)}{(x-4)^2}$.

Это технически возможно, но можно проще, так как при $x = 3\frac{9}{29}$ дробь $\frac{29x-96}{(x-4)^2} = 0$, т. е.

$y\left(3\frac{9}{29}\right) = 3\frac{9}{29} + 6 + 0$

(ведь $y(x) = x + 6 + \frac{29x-96}{(x-4)^2}$).

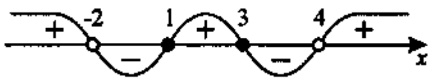
Итак, $y\left(3\frac{9}{29}\right) = 9\frac{9}{29}$.


$y = \frac{x(x+1)(x-3)}{(x-4)^2}$
y
$9\frac{9}{29}$
6
$y = x+6$
-6
-1
0
3
4
x
$3\frac{9}{29}$

Зачетная карточка 5

1. $y = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq 4. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 4+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 4-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 2)$.

Выясним возможные точки пересечения графика $y = y(x)$ и $y = 2$.

$\frac{2(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-4)} = 2$;

$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 4x - 16$; $x = 5{,}5$.

4) Найдем $E(y)$.

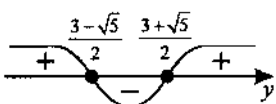
$y = \frac{2x^2-8x+6}{x^2-2x-8}$;

$yx^2 - 2xy - 8y = 2x^2 - 8x + 6$;

$(y-2)x^2 - 2(y-4)x - 8y - 6 = 0$;

$$D = (y-4)^2 + (8y+6)(y-2) =$$
$$= y^2 - 8y + 16 + 8y^2 - 10y - 12 = 9y^2 - 18y + 4 \geqslant 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-36}}{9} = \frac{9 \pm \sqrt{45}}{9} = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{9} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{3}.$$



$$E(y) = \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{3}; +\infty\right).$$

Для $(y-2)x^2 - 2(y-4)x - 8y - 6 = 0$

$x_0 = -\frac{b}{2a}$; $x_0 = \frac{y-4}{y-2}$.

Пусть $y_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{3}$;

$$x_1 = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{3}-4}{\frac{3-\sqrt{5}}{3}-2} = \frac{-9-\sqrt{5}}{-3-\sqrt{5}} = \frac{9+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{(9+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{9-5} =$$

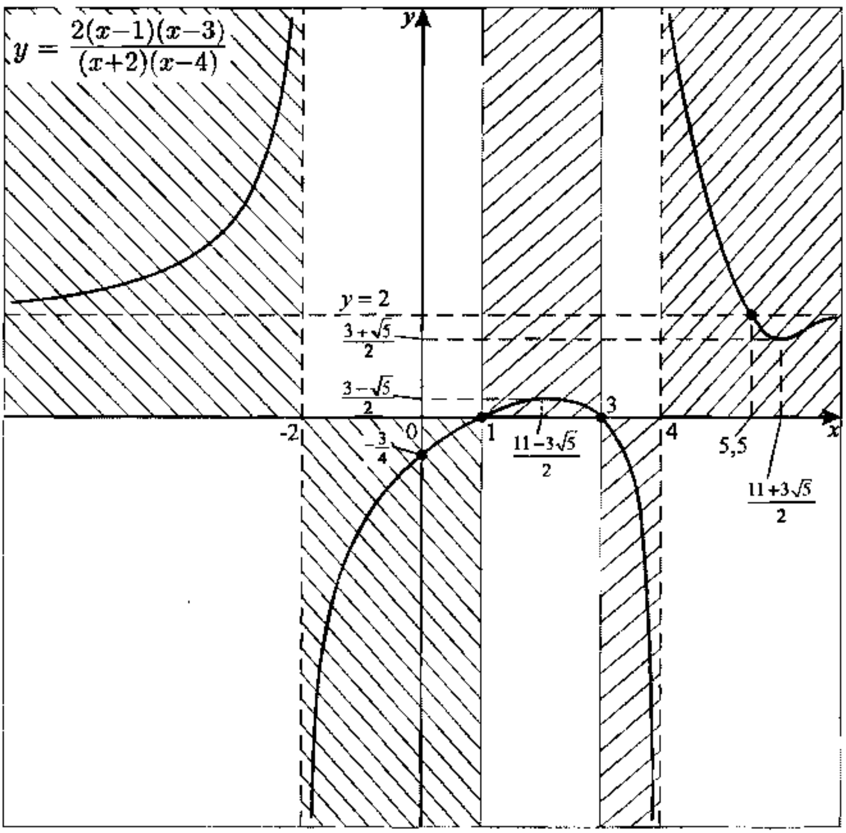
$$= \frac{1}{4}(27-5-6\sqrt{5}) = \frac{22-6\sqrt{5}}{4} = \frac{11-3\sqrt{5}}{2}.$$

Пусть $y_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{3}$;

$$x_2 = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{3}-4}{\frac{3+\sqrt{5}}{3}-2} = \frac{-9+\sqrt{5}}{-3+\sqrt{5}} = \frac{9-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(9-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{9-5} =$$

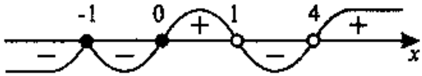
$$= \frac{1}{4}(27-5+6\sqrt{5}) = \frac{22+6\sqrt{5}}{4} = \frac{11+3\sqrt{5}}{2}.$$

5) Контрольные точки: $x = 0$; $y = -\frac{3}{4}$.



2. $y = \frac{(x+1)^2 x}{(x-1)(x-4)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 4. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 4+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 4-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;

$$\frac{(x+1)^2 x}{(x-1)(x-4)} = \frac{x^3+2x^2+x}{x^2-5x+4}.$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + x & x^2 - 5x + 4 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3 - 5x^2 + 4x} & x + 7 \\ 7x^2 - 3x \phantom{{}+28} & \\ -\underline{7x^2 - 35x + 28} & \\ 32x - 28 & \end{array}$$

Таким образом, $y = x + 7 + \frac{32x-28}{(x-1)(x-4)}$; $y = x + 7$ — наклонная асимптота.

$32x - 28 = 0$; $x = \frac{7}{8}$.

$y(\frac{7}{8}) = \frac{7}{8} + 7 = 7\frac{7}{8}$, значит, $\left(\frac{7}{8}; 7\frac{7}{8}\right)$ — координаты точки пересечения.

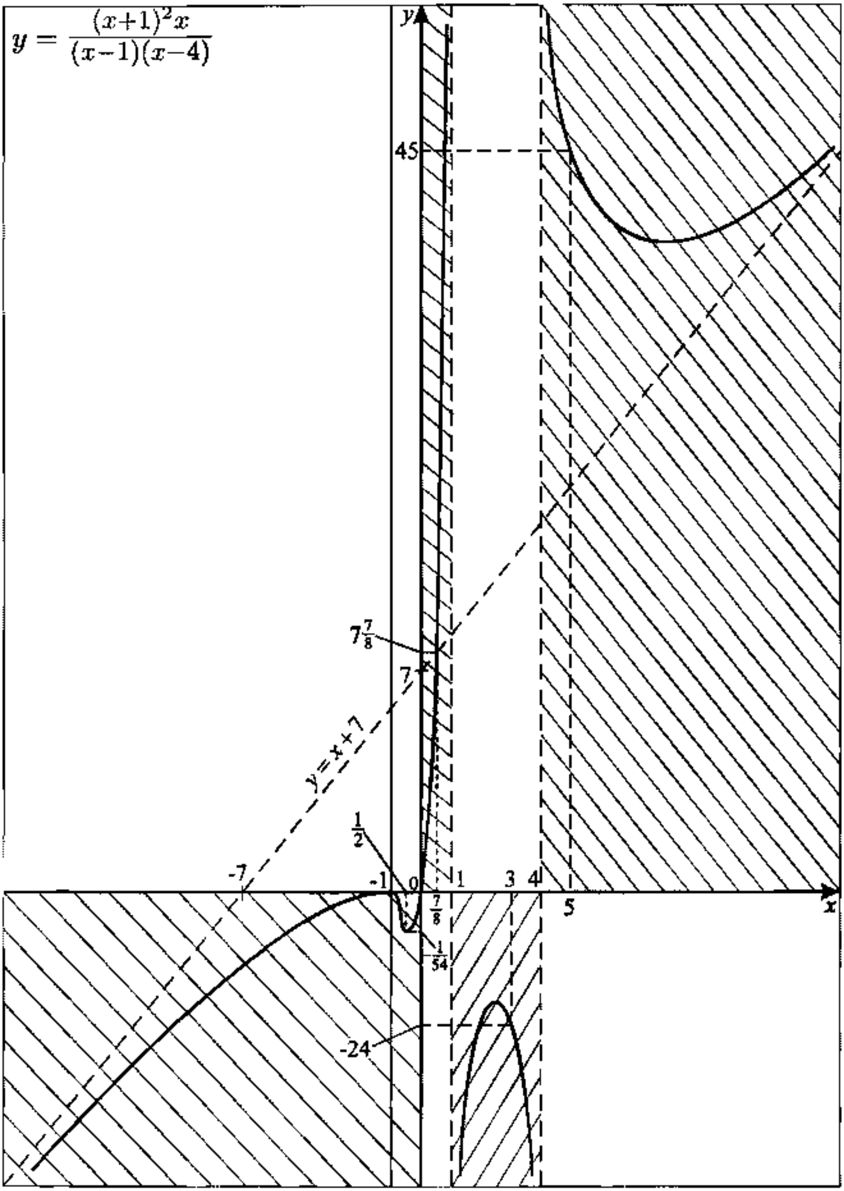
4) Контрольные точки:

$y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{2}} = -\frac{1}{54}$;

$y(3) = \frac{16\cdot 3}{2\cdot(-1)} = -24$;

$y(5) = \frac{36\cdot 5}{4\cdot 1} = 45$.

Эскиз графика:



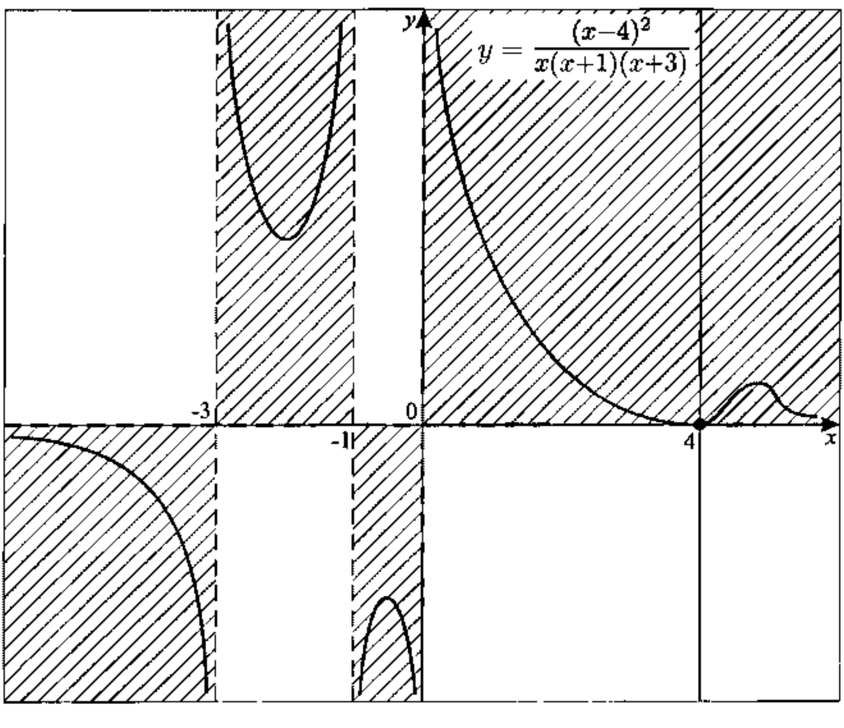
На осях дан разный масштаб.

3. $y = \frac{(x-4)^2}{x(x+1)(x+3)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq -3. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -1+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -1-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.

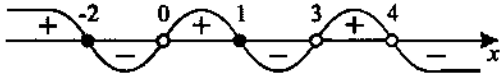


Зачетная карточка 6

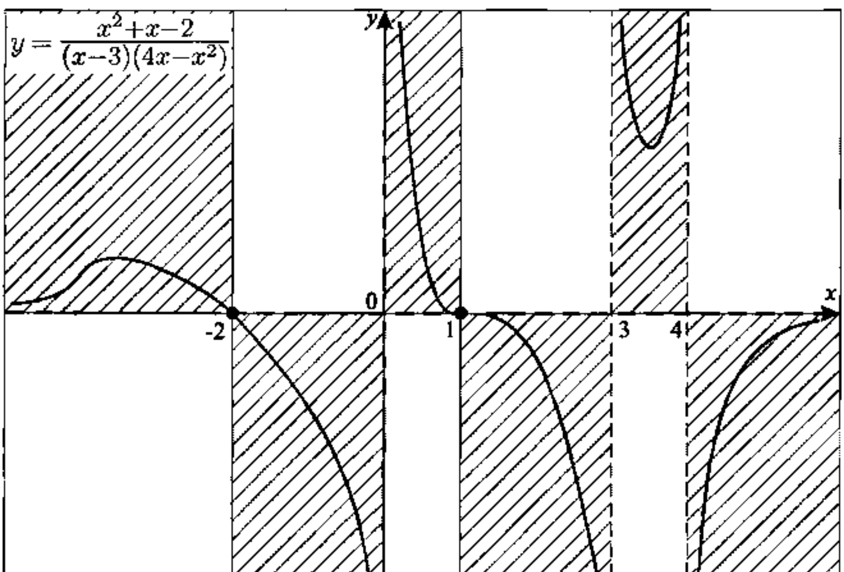
1. $y = \frac{x^2+x-2}{(x-3)(4x-x^2)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$

2) $y = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(4-x)x}$.



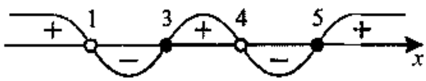
3) $(x \to 4+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 4-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 3+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.



2. $y = \frac{x^2-8x+15}{x^2-5x+4}$.

$y = \frac{(x-3)(x-5)}{(x-1)(x-4)}$.

1) $D(y)$ $\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 4. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 4+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 4-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$,

так как $\frac{x^2-8x+15}{x^2-5x+4} = \frac{x^2\left(1-\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{1-\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}$.

Выясним, при каких x график пересекается с горизонтальной асимптотой.

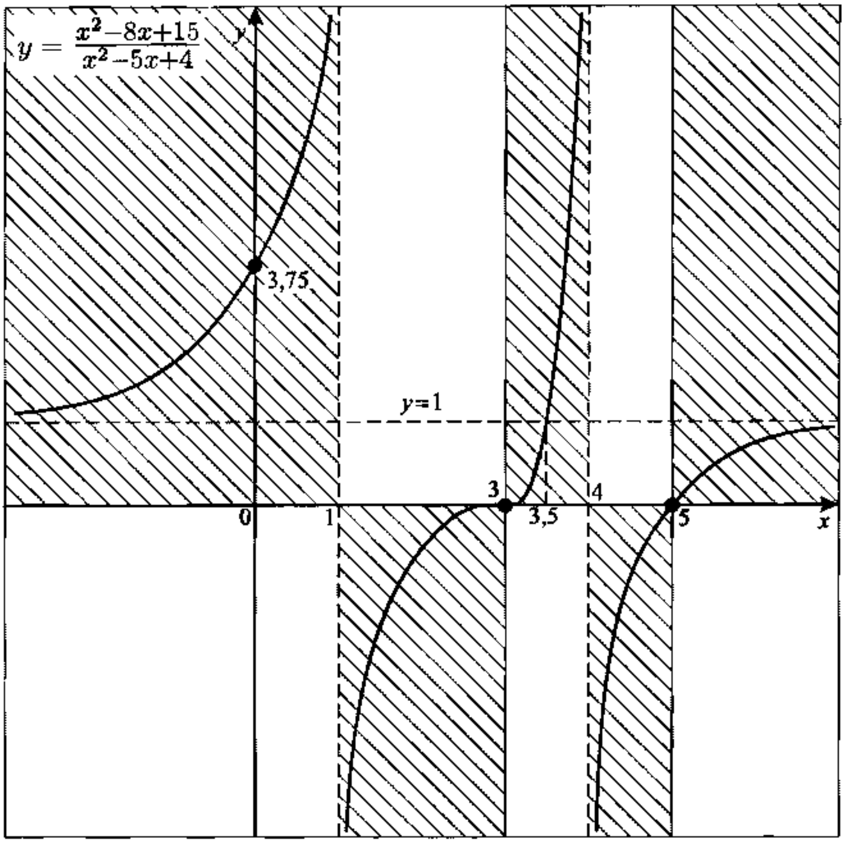
$\frac{x^2-8x+15}{x^2-5x+4} = 1$;

$x^2 - 8x + 15 = x^2 - 5x + 4$;

$3x = 11$;

$x = 3\frac{2}{3}$.

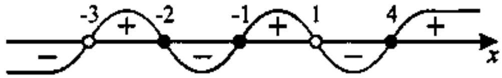
4) Функция $y = y(x)$ возрастает на $(-\infty; 1)$, $(1; 4)$ и $(4; \infty)$, но не является возрастающей.


$y=\frac{x^2-8x+15}{x^2-5x+4}$
y
3,75
y=1
0
1
3
3,5
4
5
x

3. $y = \frac{(x^2+3x+2)(x-4)}{x^2+2x-3}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq -3, \\ x \neq 1. \end{cases}$

2) $y = \frac{(x+1)(x+2)(x-4)}{(x+3)(x-1)}$.



3) $(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

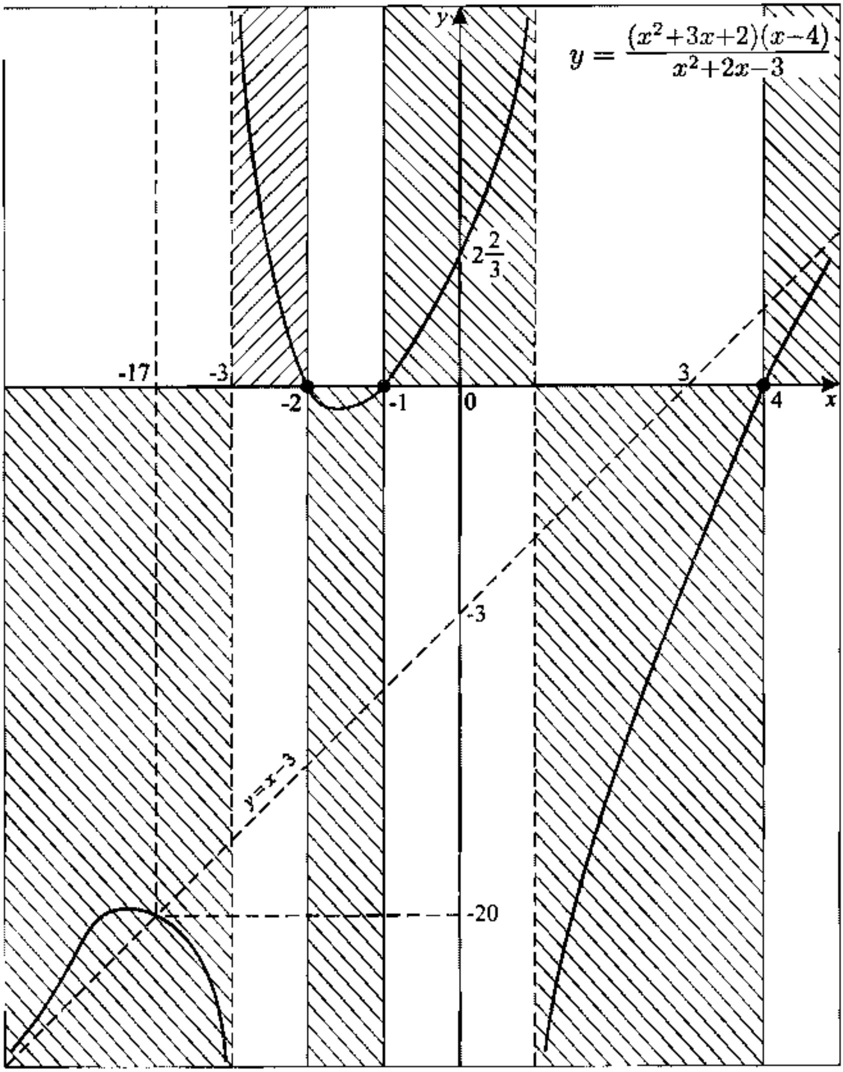
$$\left(x^2+3x+2\right)(x-4) = x^2 - x^2 - 10x - 8$$

$$\begin{array}{rl|l} - & x^3 - x^2 - 10x - 8 & x^2+2x-3 \\ & \underline{x^3 + 2x^2 - 3x\phantom{{}-8}} & x-3 \\ - & -3x^2 - 7x - 8 & \\ & \underline{-3x^2 - 6x + 9} & \\ & - x - 17 & \end{array}$$

$y = x - 3 - \frac{x+17}{x^2+2x-3}$; $y = x-3$ — наклонная асимптота.

При $x = -17$ $y = -17-3 = -20$, т. е. график $y = y(x)$ пересекает $y = x-3$, и $(-17; -20)$ — точка пересечения.

4) Контрольная точка: $x = 0$; $y = 2\frac{2}{3}$.



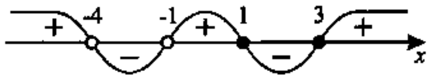
$y = \frac{(x^2+3x+2)(x-4)}{x^2+2x-3}$
y
x
$2\frac{2}{3}$
-17
-3
-2
-1
0
3
4
-3
-20
y = x−3

Зачетная карточка 7

1. $y = \frac{x^2-4x+3}{x^2+5x+4}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq -4. \end{cases}$

2) $y = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x+4)}$.



3) $(x \to -1+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -1-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -4+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -4-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$.

$\frac{x^2-4x+3}{x^2+5x+4} = 1$; $x = -\frac{1}{9}$.

4) Найдем $E(y)$.

$y = \frac{x^2-4x+3}{x^2+5x+4}$;

$yx^2 + 5yx + 4y = x^2 - 4x + 3$;

$(y-1)x^2 + (5y+4)x + 4y - 3 = 0 \; (y \neq 1)$;

$D = (5y+4)^2 - 4(y-1)(4y-3) =$

$= 25y^2 + 40y + 16 - 16y^2 + 28y - 12 =$

$= 9y^2 + 68y + 4 \geqslant 0$;

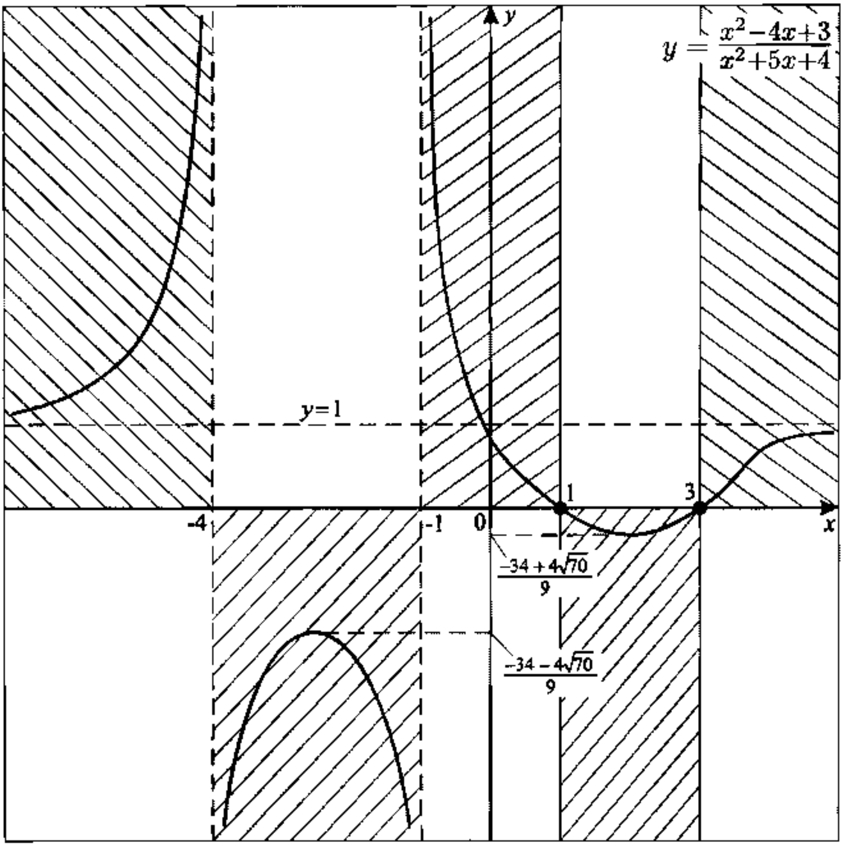
$y_{1,2} = \frac{-34 \pm \sqrt{1156-36}}{9} = \frac{-34 \pm 4\sqrt{70}}{9}$;

$E(y) = \left(-\infty; \frac{-34-4\sqrt{70}}{9}\right] \cup \left[\frac{-34+4\sqrt{70}}{9}; +\infty\right)$.

Так как $x_0 = -\frac{b}{2a}$,

то для $(y-1)x^2 + (5y+4)x + 4y - 3 = 0$ $x_0 = -\frac{5y+4}{2(y-1)}$.

При желании можно точно указать координаты $y_{\max}$ и $y_{\min}$.



Действительно, пусть $y_1=\frac{-34+4\sqrt{70}}{9}$, тогда

$$x_1=-\frac{\frac{5(-34+4\sqrt{70})}{9}+4}{2\left(\frac{-34+4\sqrt{70}}{9}-1\right)}=-\frac{-170+20\sqrt{70}+36}{-68+8\sqrt{70}-18}=$$

$$=-\frac{-134+20\sqrt{70}}{-86+8\sqrt{70}}=-\frac{-67+10\sqrt{70}}{-43+4\sqrt{70}}=$$

$$=-\frac{(-67+10\sqrt{70})(4\sqrt{70}+43)}{(4\sqrt{70}-43)(4\sqrt{70}+43)}=$$

$$=-\frac{-268\sqrt{70}+40\cdot70-67\cdot43+430\sqrt{70}}{16\cdot70-43^2}=$$

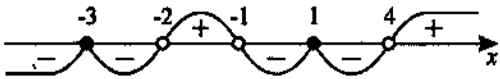
$$=-\frac{162\sqrt{70}-81}{-729}=\frac{81(2\sqrt{70}-1)}{729}=\frac{2\sqrt{70}-1}{9}\approx1{,}7.$$

Аналогично находится x_2.

2. $y = \frac{2(x^2+2x-3)^2}{(x^2+3x+2)(x-4)}$.

$y = \frac{2(x+3)^2(x-1)^2}{(x+1)(x+2)(x-4)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq -1; \\ x \neq -2; \\ x \neq 4. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 4+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$
$(x \to 4-0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to -1+0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to -1-0) \Rightarrow (y \to +\infty);$
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to +\infty);$
$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x^2+2x-3)^2 = x^4+4x^2+9+4x^3-6x^2-12x =$
$= x^4+4x^3-2x^2-12x+9;$
$(x^2+3x+2)(x-4) = x^3-x^2-10x-8.$

$$\begin{array}{r|l} -\;2x^4+8x^3-4x^2-24x+18 & x^3-x^2-10x-8 \\ \underline{2x^4-2x^3-20x^2-16x} & 2x+10 \\ -\;10x^3+16x^2-8x+18 & \\ \underline{10x^3-10x^2-100x-80} & \\ 26x^2+92x+98 & \end{array}$$

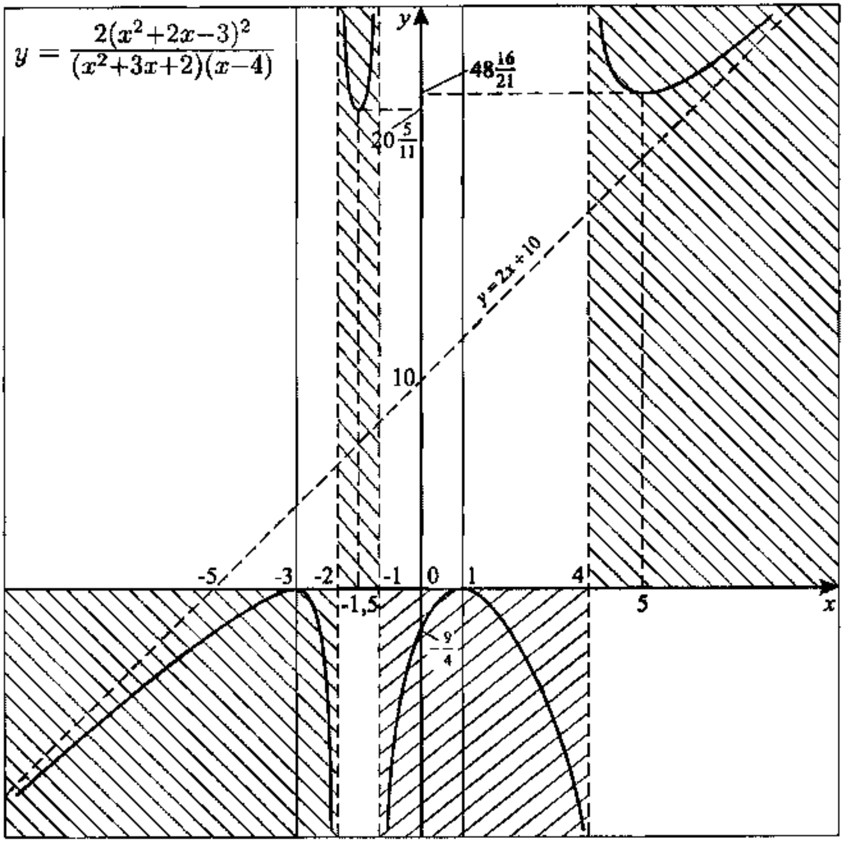
$y = 2x+10+\frac{2(13x^2+46x+49)}{(x+1)(x+2)(x-4)}$; $y = 2x+10$ — наклонная асимптота.

$13x^2+46x+49=0$; $D = 529-637<0$ — точек пересечения нет.

4) Контрольные точки:

$y(-1{,}5) = \frac{2\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{25}{4}}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{11}{2}\right)} = \frac{225}{11} = 20\frac{5}{11};$

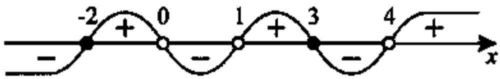
$y(5) = \frac{2\cdot 8^2\cdot 4^2}{6\cdot 7\cdot 1} = \frac{1024}{21} = 48\frac{16}{21}.$


$y = \frac{2(x^2+2x-3)^2}{(x^2+3x+2)(x-4)}$
y
x
$48\frac{16}{21}$
$20\frac{5}{11}$
$y=2x+10$
10
-5
-3
-2
-1
0
1
4
-1,5
5
$-\frac{9}{4}$

3. $y = \frac{x^2-x-6}{(x^2-5x+4)x}$.

$y = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)(x-4)x}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 4. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 4+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 4-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.

4) Контрольные точки

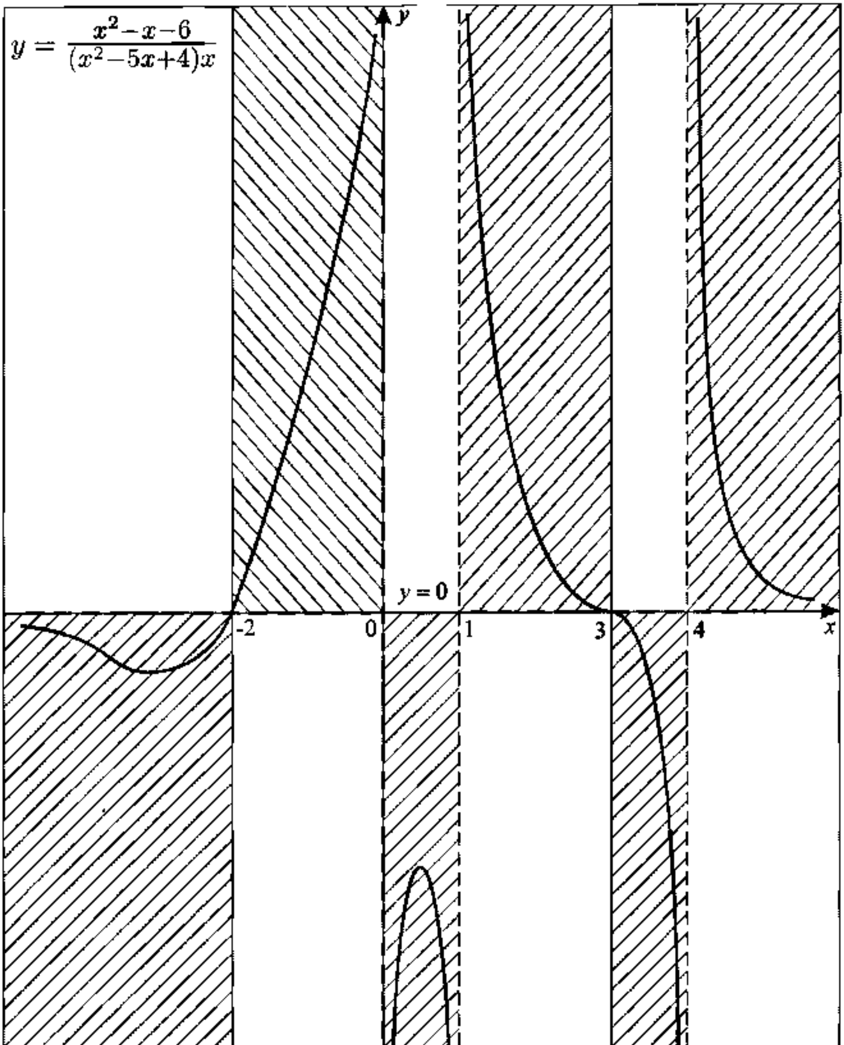
$x = -3;\ y = -\frac{1}{14}$;

$x = \frac{1}{2};\ y = -7\frac{1}{7}$;

$x = 2;\ y = 1$;

$x = 5;\ y = 0{,}7$.

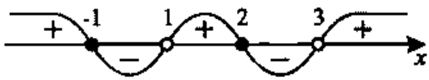
Примечание. Так как точно вычислить минимаксные значения у нас нет возможности, то эскиз графика будет достаточно приближенным, хотя характер поведения функции ясен.


$y = \frac{x^2-x-6}{(x^2-5x+4)x}$
y
y = 0
x
-2
0
1
3
4

Зачетная карточка 8

1. $y = \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+3}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 3. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 3+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$,

Так как $\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+3} = \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$,

$\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+3} = 1$;

$x^2 - x - 2 = x^2 - 4x + 3$;

$x = \frac{5}{3}$;

$\left(1\frac{2}{3}; 1\right)$ — координаты точки пересечения.

4) Найдем $E(y)$.

$y = \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+3}$;

$yx^2 - 4yx + 3y = x^2 - x - 2 \quad (y \neq 1)$;

$(y-1)x^2 - (4y-1)x + 3y + 2 = 0$;

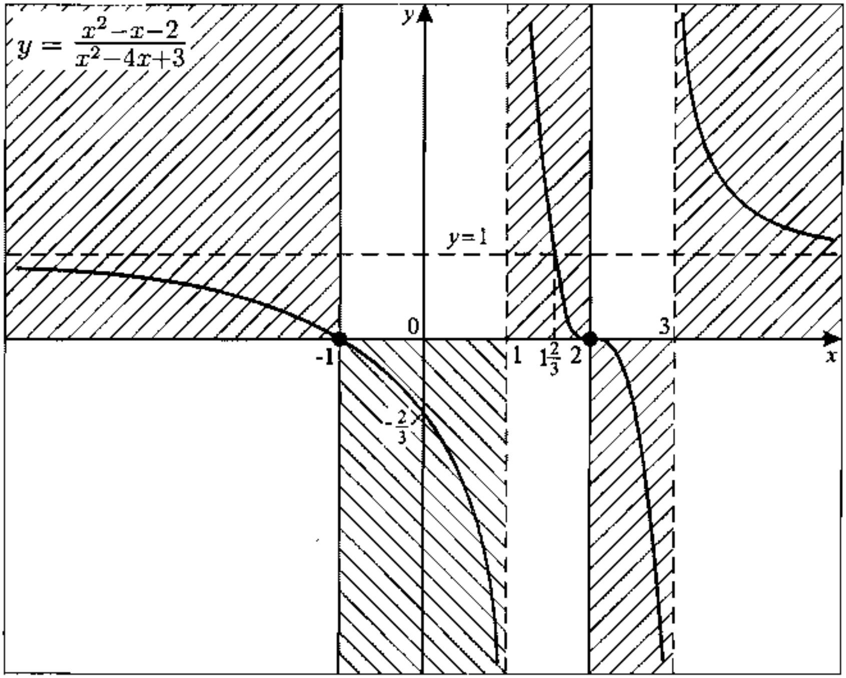
$D = (4y-1)^2 - 4(y-1)(3y+2) =$

$= 16y^2 - 8y + 1 - 12y^2 + 4y + 8 = 4y^2 - 4y + 9$;

$D = 4y^2 - 4y + 9 > 0$ при всех y.

т. е. $E(y) = (-\infty; +\infty)$ (так как $y = 1$ при $x = 1\frac{2}{3}$).

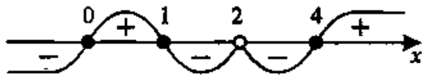
5) Контрольные точки: $x = 0$; $y = -\frac{2}{3}$.



Примечание. Из эскиза графика следует, что на каждом интервале непрерывности функция убывает. Действительно,
на $(-\infty; 1)$ функция $y(x)$ убывает,
на $(1; 3)$ функция $y(x)$ убывает,
на $(3; \infty)$ функция $y(x)$ убывает, но не является убывающей.

2. $y = \frac{x(x-1)(x-4)}{(x-2)^2}$.

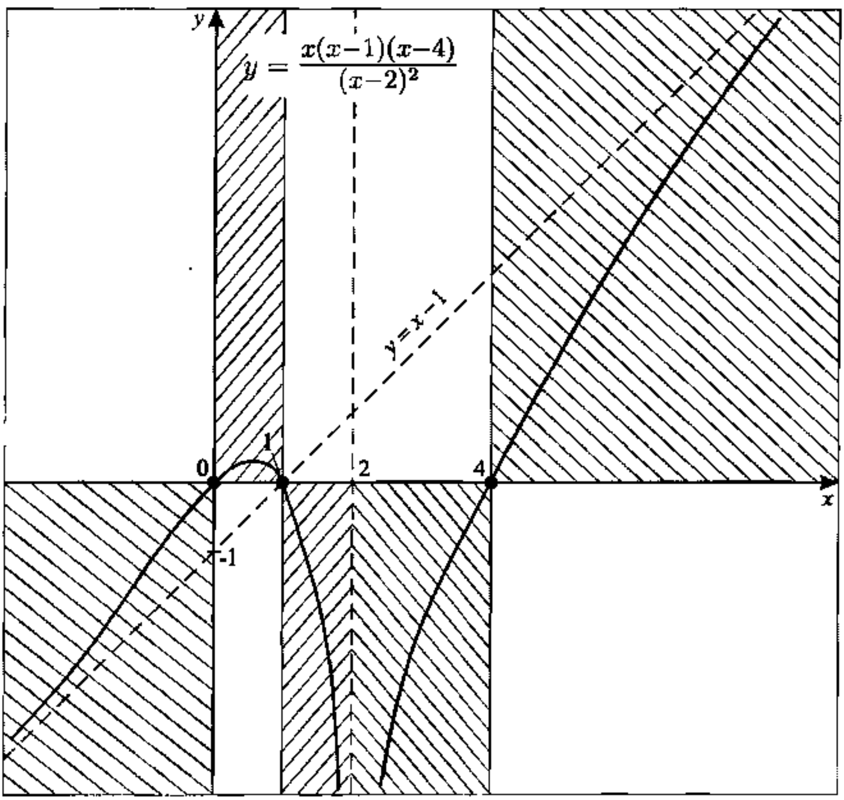
1) $D(y)$: $x \neq 2$. 2)



3) $(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$x(x-1)(x-4) = x^3 - 5x^2 + 4x$

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 - 5x^2 + 4x & x^2 - 4x + 4 \\ \underline{x^3 - 4x^2 + 4x} & \overline{x - 1} \\ -\,x^2 & \\ -\,\underline{x^2 + 4x - 4} & \\ -4x + 4 & \end{array}$$

$y = x - 1 + \frac{4-4x}{(x-2)^2}$; $4 - 4x = 0$; $x = 1$.



3. $y = \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x+4)x}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq -4. \end{cases}$

2) 

3)
$$\begin{aligned} (x \to 0+0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\ (x \to 0-0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\ (x \to -1+0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\ (x \to -1-0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\ (x \to -4+0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\ (x \to -4-0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\ (x \to \infty) &\Rightarrow (y \to 0). \end{aligned}$$

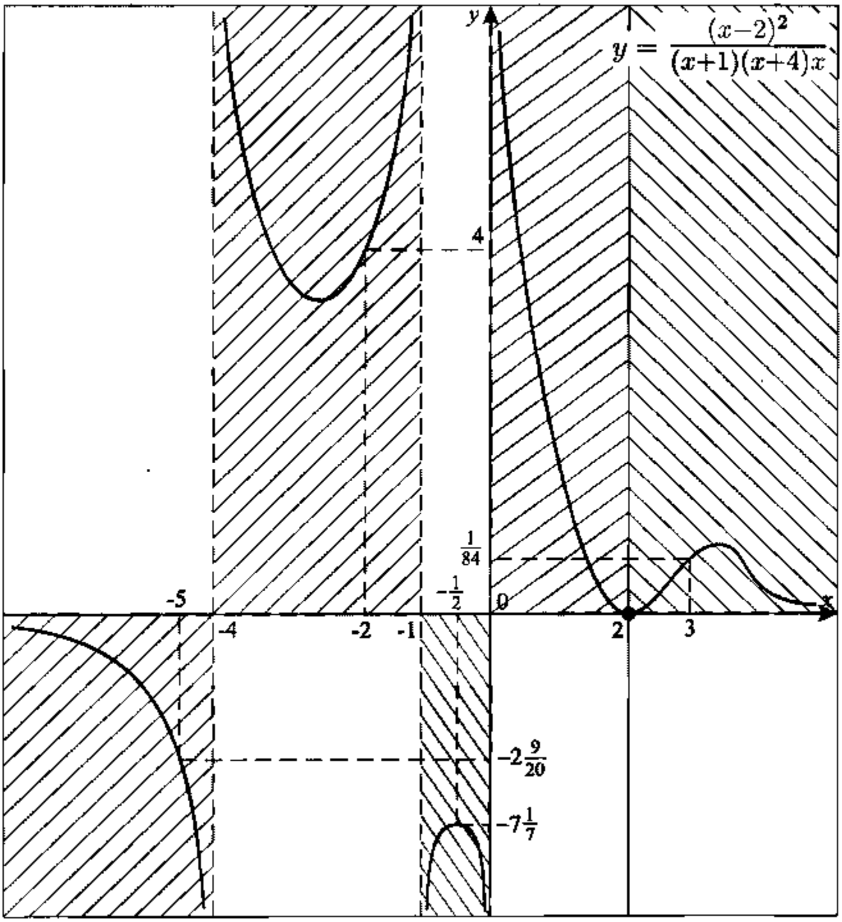
4) Контрольные точки:

$y(-2) = \frac{16}{-1\cdot 2\cdot(-2)} = 4;$

$y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{50}{7} = -7\frac{1}{7};$

$y(3) = \frac{1}{4\cdot 7\cdot 3} = \frac{1}{84};$

$y(-5) = \frac{49}{-4\cdot(-1)\cdot(-5)} = -2\frac{9}{20}.$



$y = \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x+4)x}$
y
x
4
$\frac{1}{84}$
0
-5
-4
-2
-1
$-\frac{1}{2}$
2
3
$-2\frac{9}{20}$
$-7\frac{1}{7}$

Зачетная карточка 9

1. $y = \dfrac{2(x^2+3x+2)(x-4)}{(x-1)(x^2-9)}$.

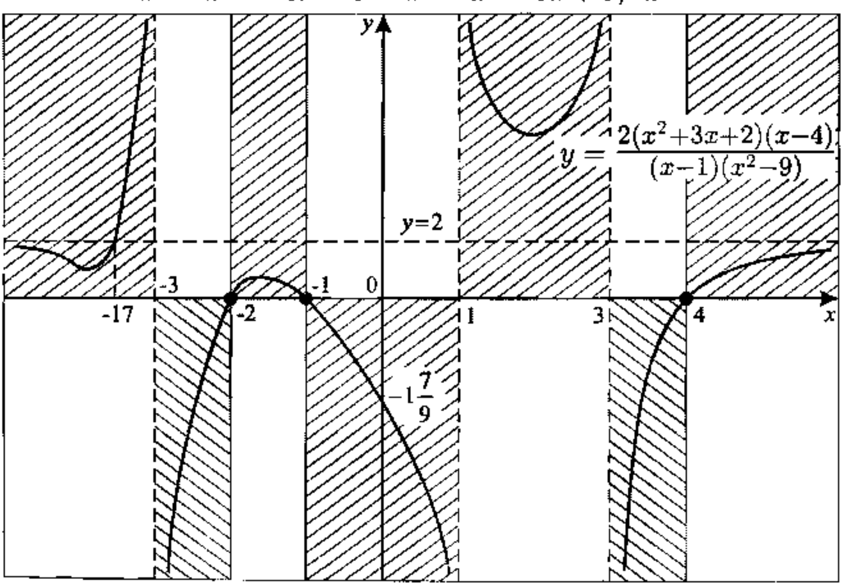
1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq \pm 3, \\ x \neq 1. \end{cases}$

2) $y = \dfrac{2(x+1)(x+2)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x+3)}$.

3)
$$\begin{aligned}
(x \to 3+0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\
(x \to 3-0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\
(x \to 1+0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\
(x \to 1-0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\
(x \to -3+0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\
(x \to -3-0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\
(x \to \infty) &\Rightarrow (y \to 2).
\end{aligned}$$

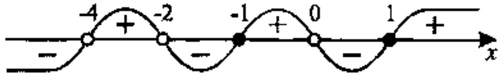
$\dfrac{2(x^2+3x+2)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x+3)} = 2.$

$x^3 - x^2 - 10x - 8 = x^3 - x^2 - 9x + 9;\ \ x = -17.$

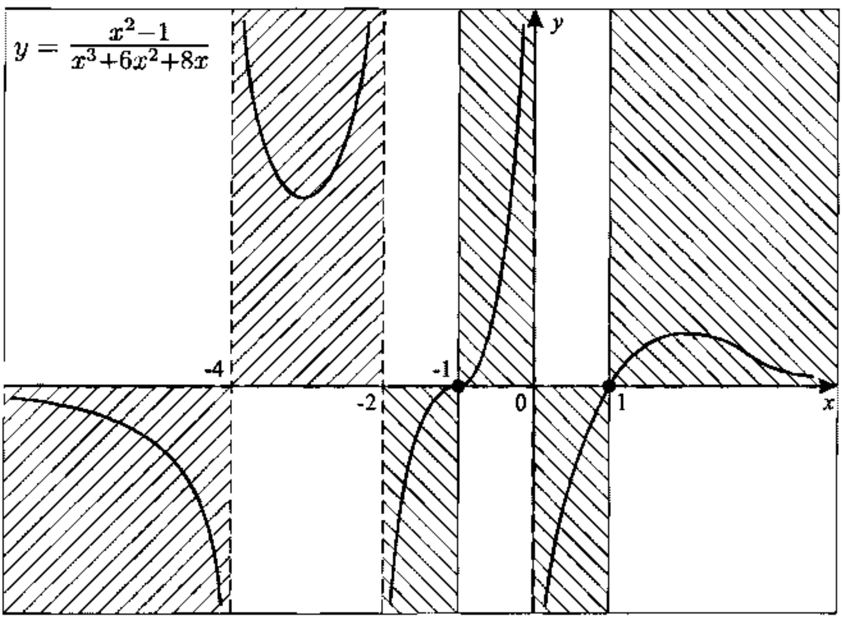


2. $y = \frac{x^2-1}{x^3+6x^2+8x}$.

1) $y = \frac{x^2-1}{x(x+2)(x+4)}$. $\qquad D(y)$: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -2, \\ x \neq -4. \end{cases}$

2) 

3) $(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -4+0) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
$(x \to -4-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.

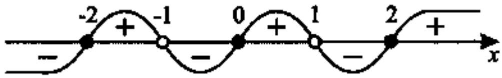


3. $y = e^{\frac{x^3-4x}{x^2-1}}$.

I. Построим вначале $t(x) = \frac{x^3-4x}{x^2-1}$.

1) $D(t)$: $\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq -1. \end{cases}$

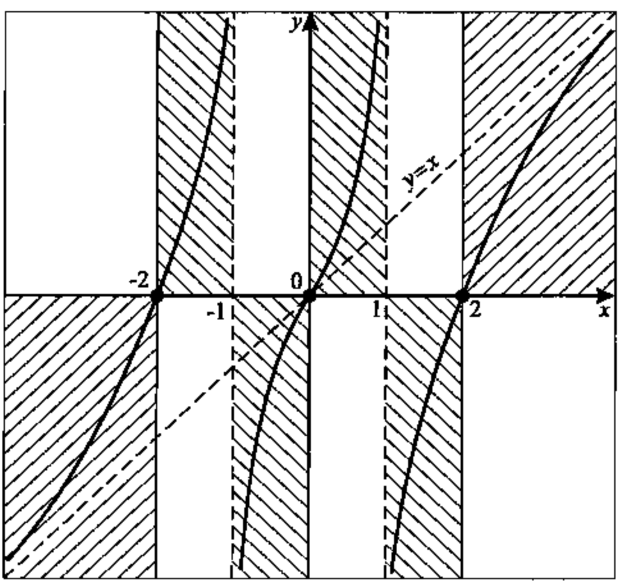
2) $t(x) = \frac{x(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-1)}$.



3) $$(x \to 1+0) \Rightarrow (t \to -\infty);$$
$$(x \to 1-0) \Rightarrow (t \to +\infty);$$
$$(x \to -1+0) \Rightarrow (t \to -\infty);$$
$$(x \to -1-0) \Rightarrow (t \to +\infty);$$

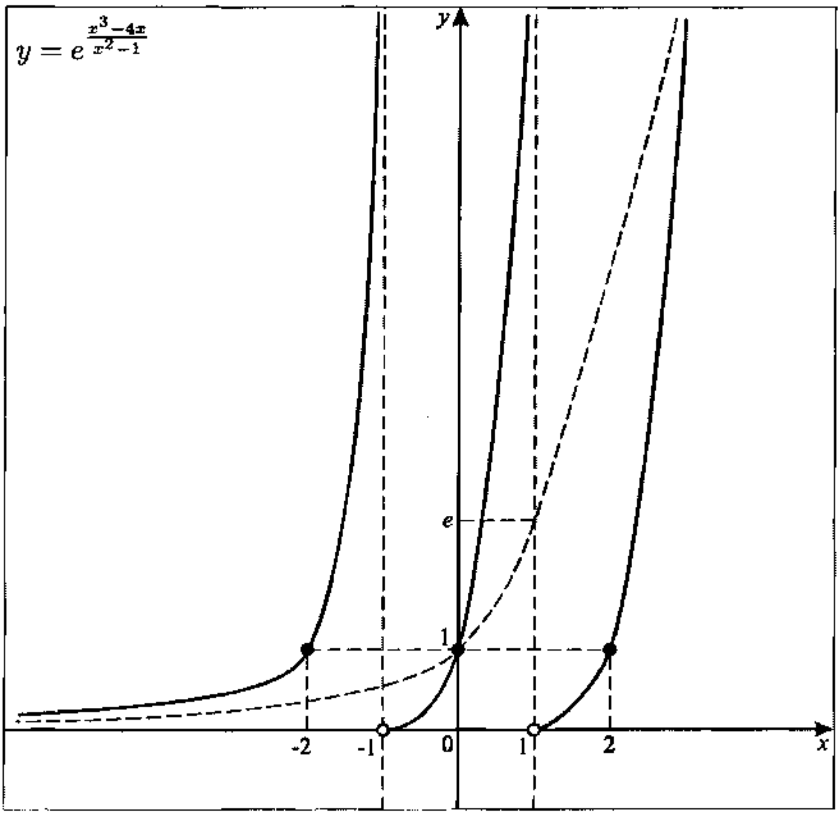
$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 - 4x & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - x} & x \\ -3x & \end{array}$$

$t(x) = x - \frac{3x}{x^2-1}$; $x = 0$; $(0;0)$ — точка пересечения графика $y = t(x)$ и $y = x$.



II. Теперь уже можно строить $y = e^{\frac{x^3-4x}{x^2-1}}$.

1) $D(y)$: $x \neq \pm 1$.
2) $y > 0$ при всех $x \in D(y)$.
3) $(x \to 1+0) \Rightarrow (t \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
   $(x \to 1-0) \Rightarrow (t \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
   $(x \to -1+0) \Rightarrow (t \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
   $(x \to -1-0) \Rightarrow (t \to +\infty) \Rightarrow (y \to +\infty)$;
   $(x \to \infty) \Rightarrow (t \to x) \Rightarrow (y \to e^x)$;
   $(x \to -\infty) \Rightarrow (t \to -x) \Rightarrow (y \to e^x)$.
4) Контрольные точки:
   $x = 0$; $y = 1$;
   $x = 2$; $y = 1$;
   $x = -2$; $y = 1$.



Зачетная карточка 10

1. $y = \frac{(x-3)(x^2+2x-3)}{(x^2-3x-4)(x+2)}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq -1, \\ x \neq 4. \end{cases}$

2) $y = \frac{(x-3)(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+1)(x+2)}$.

3) $$\begin{aligned}
(x \to 4+0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\
(x \to 4-0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\
(x \to -1+0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\
(x \to -1-0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\
(x \to -2+0) &\Rightarrow (y \to +\infty); \\
(x \to -2-0) &\Rightarrow (y \to -\infty); \\
(x \to \infty) &\Rightarrow (y \to 1);
\end{aligned}$$

$y = 1$ — горизонтальная асимптота.

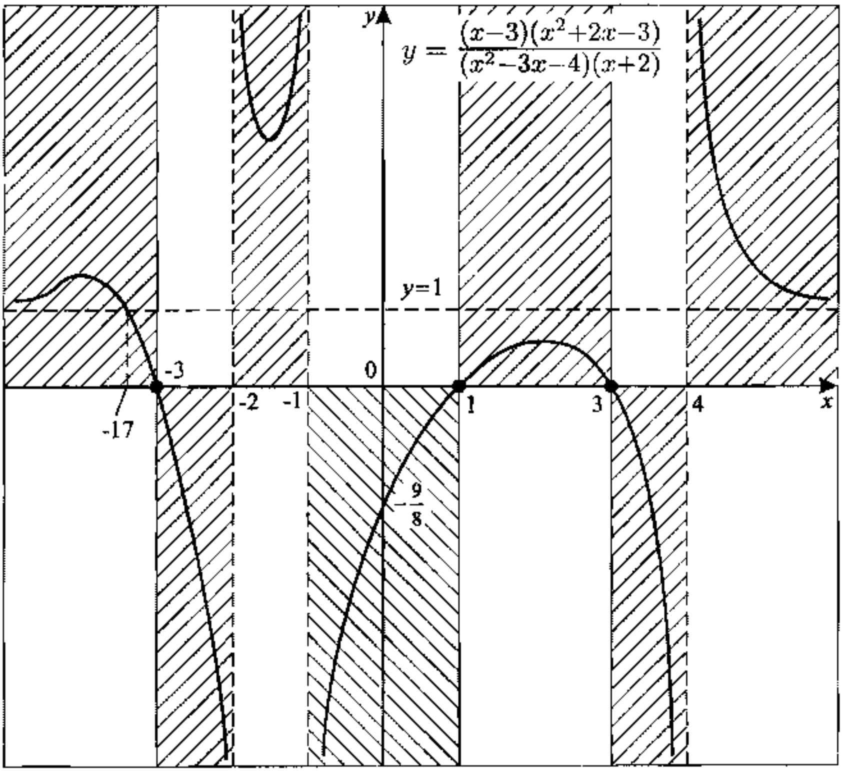
$\frac{(x-3)(x^2+2x-3)}{(x^2-3x-4)(x+2)} = 1$;

$x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^3 - x^2 - 10x - 8$;

$x = -17$; $y = 1$;

$(-17; 1)$ — точка пересечения графика $y = y(x)$ и $y = 1$.

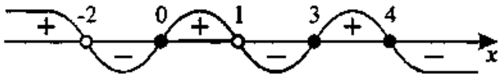
Эскиз графика:



2. $y = \frac{(x-3)(4x-x^2)}{x^2+x-2}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq 1. \end{cases}$

2) $y = \frac{(x-3)x(4-x)}{(x+2)(x-1)}$.



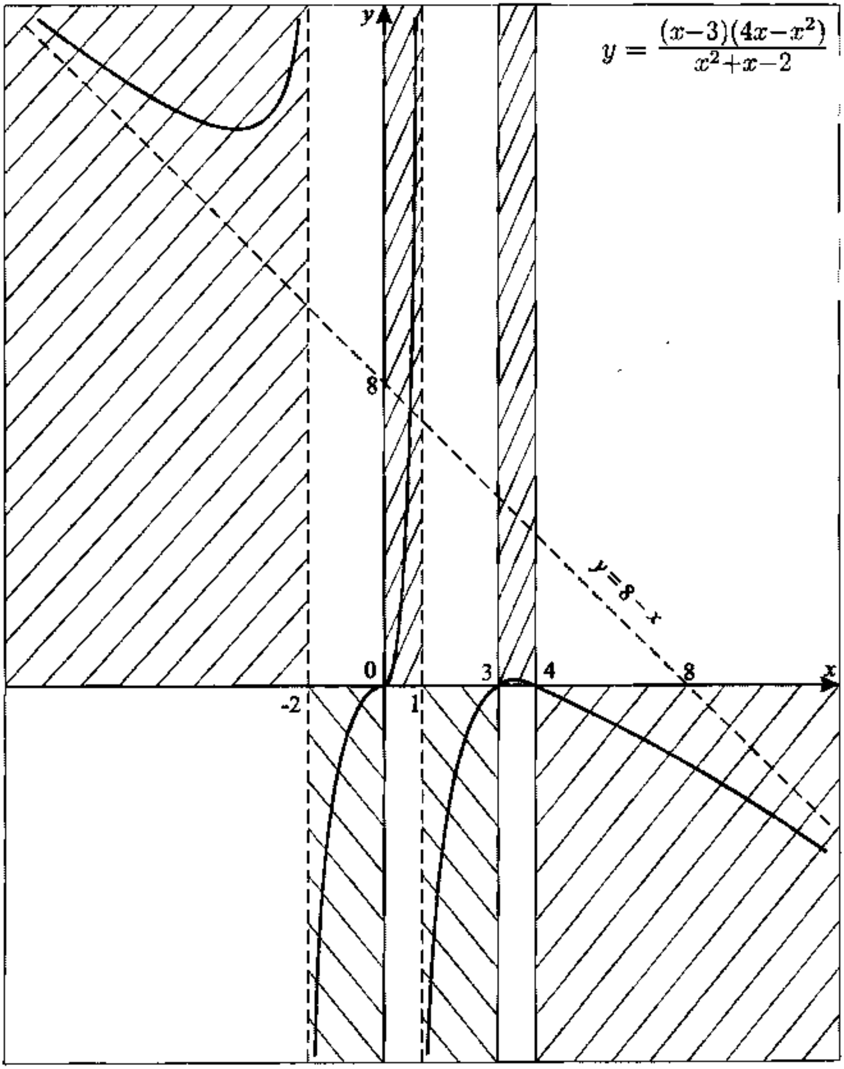
3) $$\begin{aligned} &(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to -\infty) \\ &(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to +\infty) \\ &(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to -\infty) \\ &(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to +\infty) \end{aligned}$$

$y = \frac{-x^3+7x^2-12x}{x^2+x-2}$.

$$\begin{array}{r|l} -x^3+7x^2-12x & x^2+x-2 \\ \cline{2-2} -x^3-\ \ x^2+\ \ 2x & -x+8 \\ \hline 8x^2-14x & \\ 8x^2+\ \ 8x-16 & \\ \hline -22x+16 & \end{array}$$

$y = -x + 8 - \frac{22x-16}{x^2+x-2}$.

$x = \frac{8}{11}$ — абсцисса точки пересечения графиков $y = y(x)$ и $y = -x + 8$.

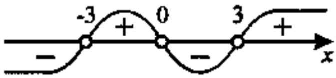

$y = \frac{(x-3)(4x-x^2)}{x^2+x-2}$
y
x
0
8
-2
1
3
4
8
$y=8-x$

3. $y = e^{\frac{4+x^2}{x^3-9x}}$.

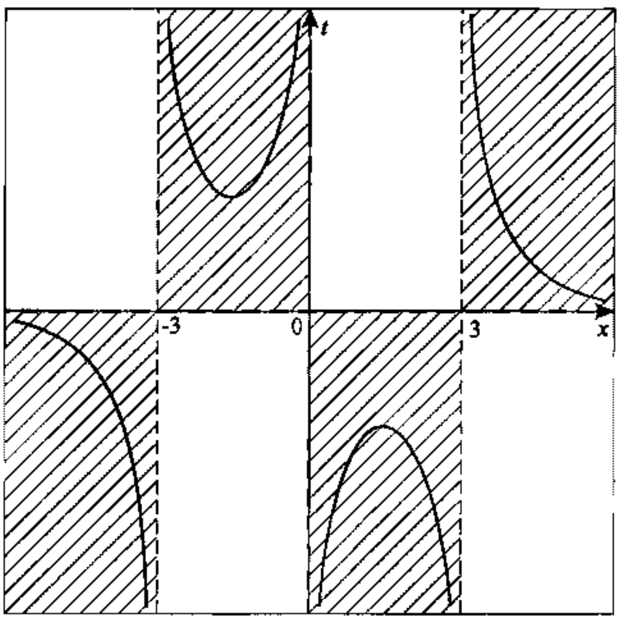
I. Вначале построим $t(x) = \frac{4+x^2}{x^3-9x}$.

1) $D(t)$: $\begin{cases} x \neq \pm 3, \\ x \neq 0. \end{cases}$

2) $t(x) = \frac{4-x^2}{x(x+3)(x-3)}$.



3)
$$\begin{aligned} (x \to 3+0) &\Rightarrow (t \to +\infty); \\ (x \to 3-0) &\Rightarrow (t \to -\infty); \\ (x \to 0+0) &\Rightarrow (t \to -\infty); \\ (x \to 0-0) &\Rightarrow (t \to +\infty); \\ (x \to -3+0) &\Rightarrow (t \to +\infty); \\ (x \to -3-0) &\Rightarrow (t \to -\infty); \\ (x \to \infty) &\Rightarrow (t \to 0). \end{aligned}$$

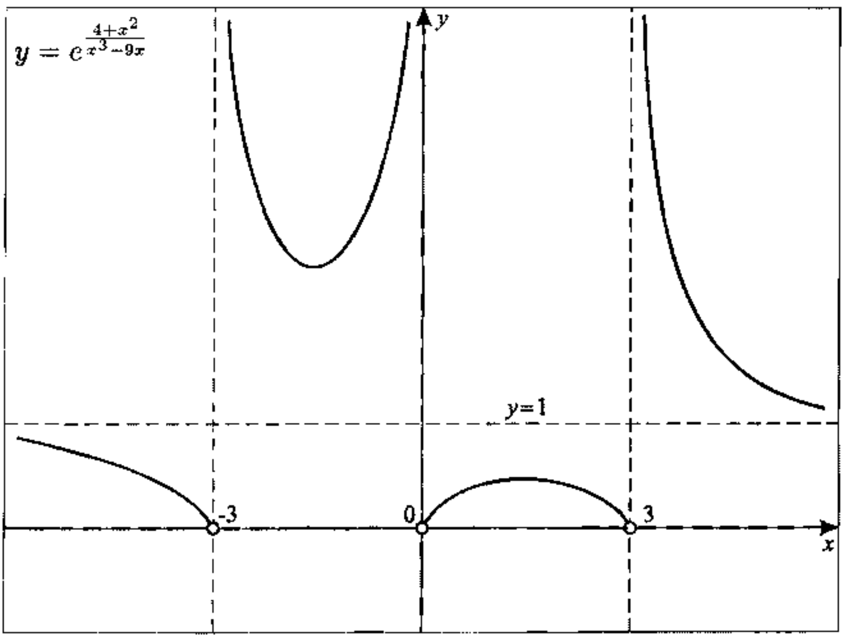


II. Теперь уже можно построить $y = e^{\frac{4+x^2}{x^3-9x}}$.

1) $D(y)$: $\begin{cases} x \neq \pm 3, \\ x \neq 0. \end{cases}$

2) $y > 0$ для любого $x \in D(y)$;

3) $$\begin{array}{llll} (x \to 3+0) & \Rightarrow (t \to +\infty) & \Rightarrow (y \to +\infty); \\ (x \to 3-0) & \Rightarrow (t \to -\infty) & \Rightarrow (y \to 0); \\ (x \to 0+0) & \Rightarrow (t \to -\infty) & \Rightarrow (y \to 0); \\ (x \to 0-0) & \Rightarrow (t \to +\infty) & \Rightarrow (y \to +\infty); \\ (x \to -3+0) & \Rightarrow (t \to +\infty) & \Rightarrow (y \to +\infty); \\ (x \to -3+0) & \Rightarrow (t \to -\infty) & \Rightarrow (y \to 0); \\ (x \to \infty) & \Rightarrow (t \to 0) & \Rightarrow (y \to 1). \end{array}$$



Содержание

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.
E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО «Виктория плюс»
В Санкт-Петербурге: (812) 516-5811, (812) 516-5805,
В Москве (филиал): (495) 488-3005
E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
193171, С.-Петербург, Фарфоровская 18, кв 1.
Тел.: (812) 943-8076; факс: (812) 560-0524.
E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru